Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им.Н.Н.Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

Топология и её приложения

Научная конференция, посвящённая памяти
Евгения Георгиевича Пыткеева

сборник тезисов

Екатеринбург 2024
7-9 февраля

НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «ТОПОЛОГИЯ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ», ПОСВЯЩЁННАЯ ПАМЯТИ Е.Г.ПЫТКЕЕВА
тезисы
Екатеринбург: Институт Математики и Механики УрО РАН, 2024

Настоящее издание содержит тезисы Научной конференции «Топология и её приложения», посвящённой памяти Е.Г. Пыткеева, проходящей с 7 по 9 февраля в городе Екатеринбурге.
Представлены работы по следующим направлениям: общая топология, приложения общей топологии, общематематические приложения.
Конференция организована в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2023-913)

ответственный редактор: Филатова М.А.
редактор: Минигулов Н.А.

Содержание

Введение

Уважаемые коллеги! Перед вами сборник тезисов Научной конференции «Топология и её приложения», посвящённой памяти выдающегося учёного Евгения Георгиевича Пыткеева. В сборнике представлены тезисы докладов участников конференции.

Евгений Георгиевич родился в Тюмени 17 июня в 1947 году. Через пятнадцать лет его семья переехала в Новосибирск, где Евгений Георгиевич в 1965 году закончил школу и поступил в Новосибирский университет. Через год он перешёл в Уральский Государственный Университет и закончил его в 1972 году по специальности математика. Работал в Инситуте математики и механики с 1969 года. Защитил сначала кандидатскую (в 1979 году), а затем и докторскую (в 1995 году) диссертации под руководством Николая Васильевича Величко.

Евгений Георгиевич всемирно известен как специалист в области общей топологии. Кроме того, он плодотворно сотрудничал с коллегами, получая выдающиеся результаты и в других областях математики. Много эмоций, сил и времени он посвящал проведению школьных олимпиад. Широко известны и очень любимы читателями книги с задачами математических олимпиад, написанные им в соавторстве с коллегами. Евгений Георгиевич является автором нескольких учебных пособий для студентов, которым он читал лекции в УрФУ; эти пособия также получили признание и высокую оценку читателей.

Евгений Георгиевич был не только талантливым и широко эрудированным математиком, но и добрым отзывчивым человеком. Любил своих родных и близких, заботился о них. Дружил с коллегами, блестяще играл в шахматы, а летом они вместе ходили в лес. Коллеги любили и уважали его. Мы всегда будем помнить Евгения Георгиевича.

On Dieudonné completeness of function spaces and Eberlein–Šmulian Theorem

Al'perin M.I., Osipov A.V.
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia
alper@mail.ru, OAB@list.ru

A space is called *Dieudonné complete* if it is complete relative to the maximal uniform structure compatible with its topology.

We investigated when the function space $C(X, Y)$ of all continuous functions from a topological space X into a uniform space Y with the topology of uniform convergence on a family of subsets of X is Dieudonné complete. Also we proved a generalization of the Eberlein–Šmulian theorem to the class of Banach spaces.

Theorem. *Let X be a Banach space with a locally convex topology which is finer than the weak topology $\sigma(X, X')$ and $A \subseteq X$. Then the following statements are equivalent:*
(1) A is relatively compact;
(2) A is relatively sequential compact;
(3) A is relatively countably compact;
(4) A is bounded.

Список литературы

[1] M. Al'perin, S. Nokhrin, A. V. Osipov. "Embedding theorems for function spaces". *Topology and its Applications.* **332** (2023), 108523.

[2] M. Al'perin, A.V. Osipov. "Generalization of the Grothendieck's theorem". *Topology and its Applications.* **338** (2023), 108648.

[3] A.V. Arhangel'skii. "Topological function spaces". Ed.MGU: 1989, 222 p.

[4] A. V. Osipov. "On the Hewitt realcompactification and τ-placedness of function spaces". *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN.* **25**:4 (2019), 177–183.

[5] A. Grothendieck. "Critéres de compacité dans les espaces functionelles généraux". *Amer. J. Math.* **74** (1952), 168–186.

[6] V. Šmulian. "Über lineare topologische Räume". *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.* **7(49)**:3 (1940), 425–448.

On weak q_D-spaces [1]

Kazachenko K., Osipov A.V.
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia
voice1081@gmail.com, OAB@list.ru

Definition. *Let X be a topological space, $x \in X$ and $A \subset X, A \neq \overline{A}$. The point x is called a weak q-point relative to A, if there is a function $\varphi : \mathcal{N}(x)^{<\omega} \to \mathcal{P}(A)$ such that:*

1. *For each $\varphi(\langle U_1, \ldots, U_n\rangle)$ there is $T \subset X, |T| \leq \aleph_0$ such that $\varphi(\langle U_1, \ldots, U_n\rangle) \subset \overline{T}$;*
2. *For each sequence $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ of open neighbourhoods of x the set $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \varphi(\langle U_1, \ldots, U_i\rangle)} \cap \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} U_i$ is not empty.*

A topological space X is called a *weak q-space*, if each non-closed subset of X has a weak q-point. Notions of a weak q-point and a weak q-space were introduced by M.O. Asanov and N.V. Velichko in [1].

Definition. *Let X be a topological space, $D \subset X, \overline{D} = X$. Space X is called a weak q_D-space, if for each non-closed in X subset B of D any point $x \in \overline{B} \setminus B$ is a weak q-point relative to B.*

Theorem 1. *Let X be a pseudocompact space and let Y be a weak q_D-space. Then (X, Y) is Grothendieck pair.*

Corollary 1. *Let S be a pseudocompact Tychonoff semitopological semigroup which is a weak q_D-space, G be a semi-open subsemigroup of S with identity. Then multiplication restricted to $G \times S$ is continuous at points $G^- \times S$ where G^- is a set of unit elements of G.*

Corollary 2. *Let S be a pseudocompact Tychonoff semitopological semigroup which is a weak q_D-space, G be a semi-open subgroup of S. Then G is a paratopological group.*

Список литературы

[1] M.O. Asanov, N.V. Velichko. "Compact subsets in $C_p(X)$". *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae.* **22**:2 (1981), 255–266.

[1] The research was supported by the Russian Science Foundation (RSF Grant No. 23-21-00195).

[2] A.V. Arhangel'skii, M.M. Choban. @Completeness type properties of semitopological groups, and the theorems of Montgomery and Ellis". *Topology proceedings*, **37** (2011), 33–60.

[3] E. Reznichenko. "Extension of mappings from the product of pseudocompact spaces". *Topology and its Applications.* **322** (2022), 108329.

Some homotopy properties of the space of thin complete linked systems[1]

Mukhamadiev F.G.
National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Faculty of Mathematics, Department of geometry and topology, Tashkent, Uzbekistan
farhod8717@mail.ru

A system $\xi = \{F_\alpha : \alpha \in A\}$ of closed subsets of a space X is called *linked* if any two elements from ξ intersect [1].

A.V. Ivanov defined the space $\mathcal{N}X$ of complete linked systems (CLS) of a space X in a following way:

Definition 1 [2]. A linked system $\mathfrak{M}$ of closed subsets of a compact X is called *a complete linked system* (a CLS) if for any closed set of X, the condition

"Any neighborhood OF of the set F consists of a set $\Phi \in \mathfrak{M}$"

implies $F \in \mathfrak{M}$.

A set $\mathcal{N}X$ of all complete linked systems of a compact X is called *the space $\mathcal{N}X$ of CLS of X*. This space is equipped with the topology, the open basis of which is formed by sets in the form of $E = O(U_1, U_2, \ldots, U_n)\langle V_1, V_2, \ldots, V_s\rangle = \{\mathfrak{M} \in \mathcal{N}X :$ for any $i = 1, 2, \ldots, n$ there exists $F_i \in \mathfrak{M}$ such that $F_i \subset U_i$, and for any $j = 1, 2, \ldots, s$, $F \cap V_j \neq \varnothing$ for any $F \in \mathfrak{M}\}$, where $U_1, U_2, \ldots, U_n$, $V_1, V_2, \ldots, V_s$ are nonempty open in X sets [2].

A complete linked system $\mathfrak{M}$ of a space X is called a *thin complete linked system* if $\mathfrak{M}$ contains at least one finite element.

We denote by $\mathcal{N}^*X$ the set of all thin complete linked systems of the space X [3].

Theorem 1. If mappings $f, g : X \to Y$ are homotopic, then the mappings $\mathcal{N}^*f, \mathcal{N}^*g : \mathcal{N}^*X \to \mathcal{N}^*Y$ are also homotopic.

Proposition 1. Let for a subset $A \subseteq X$ the relation $\mathcal{N}^*A \subseteq \mathcal{N}^*X$ is correct. If a set A is a retract of a topological space X, then the set $\mathcal{N}^*A$ is a retract of the space $\mathcal{N}^*X$.

Theorem 2. The functor of thin complete linked systems $\mathcal{N}^*$ is a covariant homotopy functor.

Proposition 2. If a topological space X is contractible, then the space $\mathcal{N}^*X$ is also contractible.

Corollary. If spaces X and Y are homotopically equivalent, then the spaces $\mathcal{N}^*X$ and $\mathcal{N}^*Y$ are also homotopically equivalent.

[1] This work was partially supported by Erasmus + "Key Action 1 - Mobility for learners and staff - Higher Education Student and Staff Mobility"

Keywords: Functor, complete linked system, retract, contractible, homotopy.

AMS Subject Classification. Primary: 18F60; Secondary: 18A22, 54A25, 55P99.

Список литературы

[1] V. V. Fedorchuk, V. V. Filippov. *General Topology. Basic Constructions*. Fizmatlit, Moscow. 2006, 336 p.

[2] A. V. Ivanov. "The space of complete enchained systems". *Siberian Math. J.*, Vol.27, No.6, 1986, pp.863-875.

[3] F. G. Mukhamadiev. "Hewitt–Nachbin number of the space of thin complete linked systems". *Geometry and topology, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.*, **197**, VINITI, Moscow, 2021, pp.95–100

On the product of almost discrete Grothendieck spaces

Osipov A.V.
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia
OAB@list.ru

In 1952 Grothendieck [6] proved the following result.

Theorem. *Let X be a compact space and let Y be a metrizable space. Then each relatively countably compact subspace of $C_p(X, Y)$ is relatively compact.*

This theorem has played an important role in topology, mathematical and functional analysis. Grothendieck's theorem has been generalized many times [1, 2, 4, 7, 8].

A topological space X is called *almost discrete*, if it has precisely one nonisolated point.

A space X is called *g-space*, if for every subset A of X such that A is countably compact in X, the closure of A in X is compact. A space X is called *a Grothendieck space (a weakly Grothendieck space)*, if $C_p(X)$ is a hereditary g-space (a g-space).

The product of two weakly Grothendieck spaces need not be a weakly Grothendieck space.

In 1998, A.V. Archangel'skii posed the following question (Question 5.13 in [3], see also Problem 4.8.3 in [5]):

Is the product of two Grothendieck spaces a weakly Grothendieck? A Grothendieck space?

We get the following results:

• Countable product X of almost discrete spaces is weakly Grothendieck if, and only if, the tightness of X is countable.

• Countable product X of almost discrete spaces is Grothendieck if, and only if, the tightness of X is countable and X is Lindelöf.

• In the model of ZFC, obtained by adding one Cohen real, there are almost discrete Grothendieck spaces Y_0 and Y_1 such that $Y_0 \times Y_1$ is not weakly Grothendieck.

• (PFA) Countable product of almost discrete Grothendieck spaces is a Grothendieck space.

Список литературы

[1] M. Al'perin, A.V. Osipov. "Generalization of the Grothendieck's theorem". *Topology and its Applications.* **338** (2023), 108648.

[2] A.V. Arkhangel'skii. "On some topological spaces that arise in functional analysis". *Russian Math. Surveys.* **31**:5 (1976), 14–30. (Translated from the Russian.)

[3] A.V. Arkhangel'skii. "Embeddings in C_p-spaces". *Topology Appl.* **85** (1998), 9–33.

[4] J.P.R. Christensen. "Joint continuity of separately continuous functions". *Proc. Amer. Math. Soc.* **82**:3 (1981), 455–461.

[5] V.V. Tkachuk. "A C_p-theorem Problem Book". Compactness in Function Spaces, Springer, (2015).

[6] A. Grothendieck. "Critéres de compacticité dans les espaces fonctionnels génereaux". *Amer. J. Math.* **74** (1952), 168–186.

[7] D. Preiss, P. Simon. "A weakly pseudocompact subspace of Banach spaces is weakly compact". *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae.* **15**:4 (1974), 603–609.

[8] V. Pták. "On a theorem of W.F. Eberlein". *Studia Math.* **14**:2 (1954), 276–284.

Some classes of topological spaces on the space of G-permutation degree

Sadullaev A. K.
Exact sciences department, Kimyo International University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan
anvars1997@mail.ru

A permutation group X is the group of all permutations (one to one and onto mappings $X \to X$). A permutation group of a set X is usually denoted by $S(X)$. If $X = \{1, 2, 3, ..., n\}$, then $S(X)$ is denoted by S_n.

Let X^n be the n-th power of a compact X. The permutation group S_n of all permutations, acts on the n-th power X^n as permutation of coordinates. The set of all orbits of this action with quotient topology we denote by SP^nX. Thus, points of the space SP^nX are finite subsets (equivalence classes) of the product X^n. Thus, two points $(x_1, x_2, ..., x_n)$, $(y_1,\ y_2, ..., y_n) \in X^n$ are considered to be equivalent, if there is a permutation $\sigma \in S_n$ such that $y_i = x_{\sigma(i)}$. The space SP^nX is called the n-permutation degree of a space X. Equivalent relation, by which we obtain space SP^nX, is called the symmetric equivalence relation.

Let G be any subgroup of the group S_n. Then it also acts on X^n as group of permutations of coordinates. Consequently, it generates a G-symmetric equivalence relation on X^n. This quotient space of the product of X^n under the G-symmetric equivalence relation is called G-permutation degree of the space X and it is denoted by SP^n_GX [1].

A space X is *developable* [2, 3] if there exists a sequence $\{\gamma_m : m \in \mathbb{N}\}$ of open covers of X such that, for each $x \in X$, $\{st(x, \gamma_m) : m \in \mathbb{N}\}$ is a local base at x. Such a sequence of covers is called a *development* for X. It is well known that every metrizable space is developable, and every developable space is clearly first countable.

A regular developable space is a *Moore space* [2, 3].

A family $\mathcal{U}$ is called *σ-closure preserving* [2] if it is represented as a union of countably many closure preserving subfamilies.

An *M_1-space* [2, 3] is a regular space having a σ-closure preserving base.

A collection $\mathcal{B}$ (not necessarily open) of subsets of a regular space X is a *quasi-base* [2] if whenever $x \in X$ and U is a neighbourhood of x, there exists a $B \in \mathcal{B}$ such that $x \in IntB \subset B \subset U$.

An *M_2-space* [2, 3] is a regular space having a σ-closure preserving quasi-base.

Theorem 1. If X is a developable space, then so is SP^n_GX.

Proposition 1. If X is a Moore space, then so is SP^n_GX.

Theorem 2. If X is an M_1-space, then so is $SP^n_G X$.

Theorem 3. If X is an M_2-space, then so is $SP^n_G X$.

Corollary 1. If the space X is stratifiable, then so is $SP^n_G X$.

Список литературы

[1] V. V. Fedorchuk, V. V. Filippov. "Topology of hyperspaces and its applications". *Mathematica, cybernetica.* Moscow: 4 (1989) - 48 p.

[2] Edited by Klaas Pieter Hart and others. "Encyclopedia of General Topology". *Elsevier Science Ltd. All rights reserved*, 2004.

[3] Chris Good, Sergio Macias. "Symmetric products of generalized metric spaces". *Topology and its Applications.* **206** (2016), 93-114.

К одному замечанию М. Громова

Богатый Семеон Антонович
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, РФ
bogatyi@inbox.ru

1. М. Громов в "Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces" [1] сделал краткое замечание: "One can also make a moduli space of isometry classes of non-compact spaces X lying within a finite Hausdorff distance from a given X_0, e.g. $X_0 = \mathbb{R}^n$. Such moduli spaces are also complete and contractible." Это наблюдение было приведено без доказательства.

В настоящее время опубликовано доказательство полноты класса Громова–Хаусдорфа в общем случае (без предположения ограниченности метрики) [3, 4], а вопрос о стягиваемости представляется нам открытым.

2. Расстоянием Громова–Хаусдорфа $d_{GH}(X, Y)$ между двумя метрическими пространствами (X, ϱ_X) и (Y, ϱ_Y) называется инфинум расстояния Хаусдорфа между любыми их изометрическими образами в других метрических пространствах.

Расстояние Громова–Хаусдорфа является обобщенной псевдометрикой, зануляющейся на парах изометричных пространств. "Обобщенная" означает, что функция расстояния может принимать бесконечное значение, а приставка "псевдо" означает, что расстояние между не изометричными пространствами может быть нулевым.

На множестве GH_c всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометричности, расстояние Громова–Хаусдорфа является метрикой.

Все (ограниченные) метрические пространства не образуют множество, поэтому надо говорить о классах (в смысле теории множеств von Neumann–Bernays–Gödel). Класс всех метрических пространств, находящихся на конечном расстоянии от X, назыается *облаком* $[X]$.

3. Для метрического пространства $X = (X, \varrho_X)$ и положительного $\lambda > 0$ рассмотрим "подобное" пространство $\lambda X = (X, \lambda\varrho_X)$.

Теорема A [2]. *Для метрических пространств X и Y*

1. $d_{GH}(\lambda X, \lambda Y) = \lambda d_{GH}(X, Y)$ для любого числа $\lambda > 0$;

2. $2d_{GH}(\Delta_1, X) = \operatorname{diam} X$;

3. $2d_{GH}(X, Y) \leq \max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\}$;

4. если диаметр X или Y конечен, то $\big|\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y\big| \leq 2d_{GH}(X, Y)$;

5. если диаметр X конечен, то $d_{GH}(\lambda X, \mu X) = \frac{1}{2}|\lambda - \mu| \operatorname{diam}$ для любых $\lambda > 0$ и $\mu > 0$, следовательно кривая $g(t) := t\,X$ является кратчайшей между любыми своими точками, длина любого отрезка этой кривой равна равна расстоянию между его концами. При $t = 1$ кривая начинается в пространстве X, а при $t = 0$ заканчивается в одноточечном пространстве Δ_1.

Таким образом, согласно 1 и 5 *отображение* $H: GH_0 \times [0,1] \to GH_0$, задаваемое на классе всех ограниченных метрических пространств формулой $H(X,\lambda) = \lambda X$, *является стягиваниванием в точку – одноточечное пространство* Δ_1, *которое неподвижно в процессе стягивания.*

4. Естественная попытка доказательства стягиваемости класса Громова–Хаусдорфа заключается, как и в случае ограниченных пространств, в использовании отображения подобия $X \mapsto \lambda X$: $H_\lambda(X) = \lambda X$. Однако теперь аналог свойства 5 из теоремы 1.1 нельзя даже сформулировать.

Для пространства X с неограниченной метрикой возникают вопросы:
А. “Всегда ли $d_{GH}(X,\lambda X) < \infty$?”
Б. “Во всяком ли облаке есть центр, т.е. такое пространство, которое “не изменяется” при подобии?”

5. Отображение $X \mapsto \lambda X$ задает на классе метрических пространств действие мультипликативной группы положительных чисел $(\mathbb{R}_+, \times)$. Так как это действие можно рассматривать на разных уровнях, то возникают разные стабилизаторы, т.е. разные подгруппы, которые “оставляют” пространство неподвижным. Положим

$$\operatorname{St}_0 X = \bigl\{\lambda \in \mathbb{R}_+ : d_{GH}(X,\lambda X) = 0\bigr\}; \quad \operatorname{St}[X] = \bigl\{\lambda \in \mathbb{R}_+ : d_{GH}(X,\lambda X) < \infty\bigr\}.$$

$$d_{GH}(X,Y) = 0 \Longrightarrow \operatorname{St}_0 X = \operatorname{St}_0 Y; \qquad d_{GH}(X,Y) < \infty \Longrightarrow \operatorname{St}[X] = \operatorname{St}[Y].$$

6. Логарифмическая функция ln осуществляет изоморфизм рассматриваемой группы на топологическую группу действительных чисел с операцией сложения – $\ln\colon (\mathbb{R}_+, \times) \to (\mathbb{R}, +)$. Группа $(\mathbb{R}, +)$ обладает сложной структурой подгрупп. Она является векторным пространством континуальной размерности $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Поэтому она содержит $2^{\mathfrak{c}} = 2^{2^{\aleph_0}}$ различных подгрупп простой структуры (подпространств).

Теорема Б. *Всякая собственная подгруппа аддитивной группы* $(\mathbb{R}, +)$ *замкнута или всюду плотна. Для всякой собственной замкнутой нетривиальной подгруппы* H *существует такое число* $a > 0$, *что* $H = a\mathbb{Z}$.

7. Будем предполагать, что $X \subset [0,\infty)$ и $0 \in X$. Нас интересуют *нормированные* метрики $\mathcal{M}_X$, т.е. такие метрики ϱ на X, что $\varrho(x, 0_X) = x$ для всякой точки $x \in X$. Из неравенства треугольника вытекает, что для любых двух точек $0 \le x, x'$

$$x - x' = \varrho(x,0_X) - \varrho(x',0_X) \le \varrho(x,x') \le \varrho(x,0_X) + \varrho(0_X,x') = x + x'.$$

Левое равенство (для всех x, x') соответствует метрике прямой на X. Правое равенство (для всех $x \ne x'$) соответствует дискретному ежу $\hat{X}$. Для всякого $-1 \le \beta \le 1$ определена промежуточная “линейная” метрика

$$\varrho_\beta(x,x') = x + \beta x' = \frac{1-\beta}{2}|x - x'| + \frac{1+\beta}{2}(x + x') \text{ при } x' < x.$$

Включение $\varrho \in \mathcal{M}_X$ *эквивалентно неравенствам* $\varrho_{-1} \le \varrho \le \varrho_1$. *Метрика* $\varrho_0 \in \mathcal{M}_X$ *является единственной ультраметрикой в* $\mathcal{M}_X$.

8. Для числа $p > 1$ пусть

$$G_p = \{p^n : n \in \mathbb{Z}\} \subset (\mathbb{R}_+, \times) \quad \text{и} \quad X_p = \overline{G_p} = \{0\} \cup G_p \subset [0, \infty).$$

Теорема 1 [3–6]. $\mathrm{St}_0(X_p, \varrho_\beta) = \mathrm{St}[(X_p, \varrho_\beta)] = G_p$ *для всякого* $-1 \le \beta \le 1$.
Теорема 2 [6]. $\mathrm{St}[(X_p, \varrho)] \subseteq G_p$ *для всякой метрики* $\varrho \in \mathcal{M}_{X_p}$.
Теорема 3 [6]. *Формула* $\varrho_\beta(x, x') = x + \beta(x, x')x'$, $x > x'$ *по всякой функции* $\beta\colon X \times X \to [a, b]$, *где* $-1 \le a \le b \le 1$ *и* $b \le 1 + 2a$, *задает нормированную метрику на* X.

Список литературы

[1] M. Gromov. "Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces". Birkhäuser, 1999. ISBN 0-8176-3898-9 (translation with additional content).

[2] D. Burago, Yu. Burago, S. Ivanov. "A Course in Metric Geometry". AMS GSM 33, 2001.

[3] S. A. Bogatyy, A. A. Tuzhilin. "Gromov–Hausdorff class: its completeness and cloud geometry". arXiv:2110.06101 (2021) [math.MG].

[4] S. I. Bogataya, S. A. Bogatyy, V. V. Redkozubov, A. A. Tuzhilin. "Clouds in Gromov–Hausdorff Class: their completeness and centers". *Topology and its Applications.* **329** (2023), 108374.

[5] S. I. Bogataya, S. A. Bogatyy. "Isometric stabilizers of clouds". *Topology and its Applications.* **329** (2023), 108381.

[6] С. А. Богатый. "Стабилизатор геометрической прогрессии в общей метрике". *Математический сборник,* **214**: 3 (2023), 85-105; *Sbornik Math.,* **214**: 3 (2023), 363–382.

[7] С. И. Богатая, С. А. Богатый, В. В. Редкозубов, А. А. Тужилин. "Облака с тривиальным стабилизатором". *Вестник МГУ. Сер. матем. и механ.,* (2024).

[8] S. A. Bogatyi. "Geometric subprogression stabilizer in common metric". *ROMAI J.,* **19**: 1 (2023), 53-63.

Об основных принципах функционального анализа

Борубаев А.А.
Институт математики НАН КР, Бишкек, Кыргызстан
fiztech-07@mail.ru

Вводятся новые классы τ-нормированных, τ-банаховых и τ-гильбертовых пространств, которые содержат классические классы нормированных, банаховых и гильбертовых пространств.

На эти новые классы пространств распространяются основные принципы функциональных пространств: принцип открытости, принцип продолжение непрерывных функционалов и принцип линейной ограниченности отображений. Построены геометрия новых классов пространств.

Определение 1. Пусть X – непустое множество. Отображение $\rho_\tau : X \times X \to R_+^\tau = \prod\{R_+^\tau : a \in A\}$, $|A| = \tau$ называется τ-метрикой или мультиметрикой (если τ - не фиксировано) на X, а пара $(\mathrm{X}, \rho_\tau) - \tau$- метрическим или мультиметрическим пространством, если выполняются следующие аксиомы:
1. $\rho_\tau(x, y) = \theta$ тогда и только тогда, когда $x = y$; где θ - точка пространства R_+^τ, все координаты которой состоят из нулей;
2. $\rho_\tau(x, y) = \rho_\tau(y, x)$ для всех $x, y \in X$;
3. $\rho_\tau(x, y) \le \rho_\tau(x, z) + \rho_\tau(z, y)$ для всех $x, y, z \in X$;
4. Для любого $a, b \in A$ существует такой $c \in A$, что $\rho_c(x, y) = \max\{\rho_a(x, y), \rho_b(x, y)\}$ для всех $x, y \in X$, где $\rho_a(x, y) = q_a(\rho_\tau(x, y))$, $q_a : R_+^\tau \to R_+^a$ - проекция на a-ый сомножитель.

Определение 2. Отображение $\|\cdot\|_\tau : L \to R_+^\tau = \prod\{R_+^a : a \in A\}, |A| = \tau$ линейного пространства L в пространство R_+^τ называется τ-нормой или мультинормой (если τ не фиксировано) на L, а пара $(L, \|\cdot\|_\tau) - \tau$ - нормированным или мультинормированным пространством, если выполняются следующие аксиомы:
1. $\|x\|_\tau = \theta$ тогда и только тогда, когда x является нулевым элементом пространства L, а θ - точка пространства R_+^τ; все координаты которой равны нулю;
2. $\|\lambda x\|_\tau = |\lambda| \cdot \|x\|_\tau$ для любою скаляра $\lambda \in R$ и каждого $x \in L$;
3. $\|x + y\|_\tau \le \|x\|_\tau + \|y\|_\tau$ для всех $x, y \in L$;
4. Для любых $a, b \in A$, существует такой $c \in A$, что $q_c(\|x\|_\tau) = \max\{q_a(\|x\|_\tau), q_b(\|x\|_\tau)\}$, для всех $x \in L$, где $q_a : R_+^\tau \to R_+^a$ - проекция на a-ый сомножителя R_+^a для любого $a \in A$.

Теорема 1. Всякое τ-нормированное (банахово) пространство $(L, \|\cdot\|_\tau)$ можно представить как предел проективного спектра $S = \big\{(L_a, \|\cdot\|_a), \pi_a^b, A\big\}$, состоящих из нормированных (банаховых) пространств. Причем, каждая проекция $\pi_a : (L, \|\cdot\|_\tau) \to (L_a, \|\cdot\|_a)$ является открытым непрерывным линейным отображением.

Теорема 2 (об открытом отображении). Если $f : (L, \|\cdot\|) \to (L', \|\cdot\|'_\tau)$ - непрерывное линейное отображение τ- банахово пространства $(L, \|\cdot\|)$ на τ-банахово пространство $(L', \|\cdot\|'_\tau)$, то отображение f является открытым.

Теорема 3 (об обратном отображении). Если $f : (L, \|\cdot\|_\tau) \to (L', \|\cdot\|'_\tau)$ биективное непрерывное линейное отображение τ- банахова пространства $(L, \|\cdot\|_\tau)$ на τ- банахово пространство $(L', \|\cdot\|'_\tau)$, то обратное отображение также является непрерывным.

Теорема 4 (о замкнутом графике). Предполжим, что $(L, \|\cdot\|_\tau)$ и $(L', \|\cdot\|'_\tau)$ являются τ-банаховыми пространствами, а отображение $f : L \to L'$ - линейно и его график $G = \{(x, Ax) : x \in L\}$ замкнут в $(L, \|\cdot\|_\tau) \to (L', \|\cdot\|'_\tau)$. Тогда отображение f непрерывно.

Определение 3. Линейное отображение $f : L \to R^\tau$ линейного пространства L в линейное пространство R^τ называется линейным τ- функционалом.

Теорема 5 (о продолжении непрерывных линейных τ-функционалов). Пусть $(L, \|\cdot\|_\tau)$ - произвольное τ- нормированное пространство, L_0 - его подпространство и f_0 непрерывный линейный τ-функционал на L_0. Этот непрерывный линейный τ-функционал может быть продолжен до некоторого непрерывного линейного τ-функционала f на всем пространстве $(L, \|\cdot\|_\tau)$ без увеличения τ-нормы, т.е. так, что $\|f\|_\tau = \|f_0\|_\tau$.

Теорема 6 (о равномерной ограниченности непрерывных линейных операторов). Для того чтобы последовательность непрерывных линейных операторов $\{f_n\}$, отображающих τ-банахово пространство $(L, \|\cdot\|_\tau)$ в τ-нормированное пространство $(L', \|\cdot\|'_\tau)$, сходилась к непрерывному линейному оператору f, необходимо и достаточно, чтобы:
1. τ-нормы операторов f_n были ограничены и совокупности: $\|f_n\| \leq M, M \in R^\tau_+ (n = 1, 2, 3, \ldots)$;
2. Последовательность $f_n(x)$ сходилось к $f(x)$ для каждого $x \in L$.

Список литературы

[1] В.А. Садовничий. "Теория операторов". Изд-во МГУ. Москва, 2004.

[2] Р. Эдвардс. "Функциональный анализ". Изд-во «Мир», Москва, 1969.

[3] У. Рудин. "Функциональный анализ". Москва. Изд-во «Лань», Москва, 2005.

[4] М.А. Антоновский, В.Г. Болтянский, Т.А. Сарымсаков. "Топологические полуполя". Изд-во СамГУ. Ташкент, 1960.

[5] М.А. Антоновский, В.Г. Болтянский, Т.А. Сарымсаков. "Очерки о топологических полуполей". *УМН.* **21** (1966), 185–218.

[6] Р. Энгелькинг. "Общая топология". Москва: Наука, 1986.

[7] А.А. Борубаев. "О метрических пространствах и их отображениях". *Известия НАН КР.* **2** (2012), 7–10.

[8] А.А. Борубаев. "Об одном обобщении метрических, нормированных и унитарных пространств". *Доклады РАН.* **455**:2 (2014), 1–3.

[9] Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. "Функциональный анализ". Изд-во «Наука», Москва, 1977.

[10] Х. Шефер. "Тологические векторные пространства". "Мир Москва, 1971.

[11] А.А. Борубаев. "Равномерная топология". Бишкек, Наука, 2013.

О свободных абелевых n-периодических топологических группах[1]

Гензе Л.В.
Томский государственный университет, Томск, Россия
genze@math.tsu.ru

Пусть $n \geqslant 2$ — фиксированное натуральное число и X — непустое множество. *Свободной абелевой n-периодической группой, порождённой множеством* X, будем называть прямую сумму семейства групп $\{Z_n^x\}_{x \in X}$, где $\mathbb{Z}_n^x = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ для каждого $x \in X$.

Элементы группы $\mathcal{A}^{[n]}(X)$ — это формальные конечные линейные комбинации $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k$ элементов множества X с коэффициентами $\alpha_i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Сложение линейных комбинаций проводится путём сложения коэффициентов при одинаковых x_i и приведения их по модулю n.

Теорема 1 ([1]). *Для любого тихоновского пространства X существует абелева n-периодическая топологическая группа $A^{[n]}(X)$, обладающая следующими свойствами:*

1) алгебраически $A^{[n]}(X)$ является свободной абелевой n-периодической группой, порождённой множеством X;

2) X гомеоморфно замкнутому подпространству в $A^{[n]}(X)$;

3) если G — произвольная абелева n-периодическая топологическая группа и $f : X \to G$ – непрерывное отображение, то f можно продолжить до непрерывного гомоморфизма $\tilde{f} : A^{[n]}(X) \to G$.

Такую группу будем называть свободной абелевой n-периодической топологической группой пространства X.

Группу $A^{[2]}(X)$ будем называть *свободной булевой топологической группой пространства* X и обозначать $B(X)$. Группу $B(X)$ также можно трактовать как множество $[X]^{<\omega}$ с операцией $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Доклад будет посвящён обзору свойств свободных абелевых n-периодических топологических групп и сравнению этих свойств со свойствами свободных абелевых топологических групп.

Список литературы

[1] Л.В. Гензе. "Свободные n-периодические топологические группы". *Вестн. Томского ун-та. Математика и механика.* **3(11)** (2010), 23–28.

[1] Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2023-943).

Полунормальные функторы и паранормальные пространства[1]

Иванов А.А.
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра общей топологии и геометрии, Москва, Россия
an98iv@yandex.ru

Теорма Катетова гласит, что если куб компакта наследственно нормален, то этот компакт метризуем. Ряд обобщений данной теоремы использует понятие нормального функтора, введенное в работе [1] для категории Comp компактных пространств и их непрерывных отображений. Примером подобного обобщения является следующая теорема:

Теорема 1. [2] *Если для нормального функтора $\mathcal{F}$ степени $\geqslant 3$, действующего в категории* Comp*, пространство $\mathcal{F}(X)$ наследственно нормально, то X — метризуемый компакт.*

Примеры других подобных обобщений теоремы Катетова можно найти в работах [3,4] и некоторых других. Эти результаты обобщают теорему 1 путём ослаблений требований, накладываемых на $\mathcal{F}(X)$, с переходом к понятию нормального функтора в категории $\mathcal{P}$ паракомпактных p-пространств и их совершенных отображений.

В работе [5] были рассмотрены полунормальные функторы в категории Comp и введено для них некоторое специальное условие (*), а также доказана следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть X — компакт, $\mathcal{F}$ — полунормальный функтор в категории* Comp, $\mathrm{sp}(\mathcal{F}) = \{1, m, n, ...\}$ *и $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию (*). Тогда если пространство $\mathcal{F}_n(X) \setminus X$ наследственно нормально, то пространство X метризуемо.*

В данном докладе рассматривается понятие полунормального функтора в категории $\mathcal{P}$ и получается дальнейшее обобщение теоремы Катетова:

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{F}$ — полунормальный функтор в категории $\mathcal{P}$ со степенным спектром* $\mathrm{sp}(\mathcal{F}) = \{1, m, n, ...\}$*, удовлетворяющий условию (*). Если для паракомпактного p-пространства X пространство $\mathcal{F}_n(X) \setminus X$ наследственно паранормально, то пространство X метризуемо.*

Результаты этого исследования более подробно изложены в работе [6].

Список литературы

[1] Е. В. Щепин. "Функторы и несчетные степени компактов". *Успехи матем. наук.* **36**:3 (1981), 3–62.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284»

[2] В. В. Федорчук. "К теореме Катетова о кубе". *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.* **4** (1989), 93–96.

[3] А. П. Комбаров. "Об одной слабой форме нормальности". *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.* **5** (2017), 48–51.

[4] А. А. Иванов. "Нормальные функторы и паранормальность". *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.* **6** (2021), 51–53.

[5] А. В. Иванов. "Теорема Катетова о кубе и полунормальные функторы". *Уч. зап. Петрозавод. гос. ун-та.* **2** (2012), 104–108.

[6] А. А. Иванов. "Полунормальные функторы и паранормальность". *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.* **2** (2023), 67–71.

О размерностях квантования в пространствах вида $\mathcal{F}(X)$[1]

Иванов А.В.
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Петрозаводск, Россия
alvlivanov@krc.karelia.ru

Пусть $\mathcal{F}$ — полунормальный метризуемый функтор в категории компактов, (X,ρ) — метрический компакт, $\rho_{\mathcal{F}}$ — функториальное продолжение метрики ρ на $\mathcal{F}(X)$ и $\mathcal{F}_n(X)$ — подпространство $\mathcal{F}(X)$, состоящее из точек ξ, носитель $\mathrm{supp}(\xi)$ которых содержит не более чем n элементов ($n \in \mathbb{N}$). Для каждого $\xi \in \mathcal{F}(X)$ и $\varepsilon > 0$ положим $N(\xi,\varepsilon) = \min\{n : \rho_{\mathcal{F}}(\xi, \mathcal{F}_n(X)) \leq \varepsilon\}$. Для любой точки $\xi \notin \bigcup_{n\in\omega_0} \mathcal{F}_n(X)$ число $N(\xi,\varepsilon)$ неограниченно возрастает при $\varepsilon \to 0$. Скорость этого возрастания характеризует величина

$$\dim_{\mathcal{F}}(\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln N(\xi,\varepsilon)}{-\ln\varepsilon},$$

которую мы называем размерностью квантования (или размерностью финитной аппроксимации) точки ξ (если указанный предел не существует, рассматриваем верхний и нижний пределы, и получаем верхнюю $\overline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi)$ и нижнюю $\underline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi)$ размерности квантования).

Для функтора exp с метрикой Хаусдорфа размерность квантования совпадает с емкостной размерностью $\dim_B F$ замкнутого подмножества $F \subset X$, для функтора вероятностных мер P с метрикой Канторовича – Рубинштейна по данному выше определению мы получаем классическую размерность квантования вероятностной меры.

Если функтор $\mathcal{F}$ сохраняет ε-сети (т.е. для любой ε-сети A в X множество $\mathcal{F}(A)$ является ε-сетью в $\mathcal{F}(X)$), то для любой точки $\xi \in \mathcal{F}(X)$ справедливы неравенства

$$\underline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi) \leq \underline{\dim}_B(\mathrm{supp}(\xi)),\ \overline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi) \leq \overline{\dim}_B(\mathrm{supp}(\xi)). \tag{1}$$

В связи с неравенствами (1) естественно возникает общий вопрос о промежуточных значениях размерностей квантования для функтора $\mathcal{F}$ (классический вопрос теории размерности):
Верно ли, что для любого неотрицательного числа a, не превосходящего соответствующей емкостной размерности (верхней или нижней) компакта X, в $\mathcal{F}(X)$ существует точка ξ, соответствующая размерность квантования которой (верхняя или нижняя) равна a?

[1]Финансовое обеспечение исследования осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

Для верхних размерностей этот вопрос решен положительно для функторов exp, P, суперрасширения λ и функтора I идемпотентных мер (мер Маслова). При этом доказано, что если в компакте X существует замкнутое подмножество F размерности $\underline{\dim}_B F = a \leq \underline{\dim}_B X$, то в $\mathcal{F}(X)$ найдется точка ξ размерности $\underline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi) = a$ для всех указанных выше функторов.

Однако оказывается, что существуют метрические компакты положительной емкостной размерности, у которых все собственные замкнутые подмножества нульмерны в смысле $\underline{\dim}_B$. Таким образом, теорема о промежуточных значениях нижней емкостной размерности (размерности квантования для функтора exp) в общем случае неверна. При этом доказано, что для любого $a \in [0, \overline{\dim}_B X]$ существует замкнутое подмножество $F \subset X$, для которого $\overline{\dim}_B F = a$ и $\underline{\dim}_B F = 0$.

Наиболее сильный результат о промежуточных значениях размерностей квантования получен для функтора вероятностных мер. А именно, для любого компакта X размерности $\dim_B X = a$ и любых двух чисел $b \in [0, a]$ и $c \in [0, b]$ на X существует вероятностная мера μ, для которой $\underline{\dim}_P(\mu) = c$ и $\overline{\dim}_P(\mu) = b$.

Перечисленные выше результаты опубликованы в работах [1–4].

Список литературы

[1] A. V. Ivanov. "On quantization dimensions of idempotent probability measures". *Topology and its Applications.* **306** (2022), 107931.

[2] А.В. Иванов, О.В. Фомкина. "О порядке метрической аппроксимации максимальных сцепленных систем и емкостных размерностях". *Труды КарНЦ РАН,* **7** (2019), 5–14.

[3] А.В. Иванов. "О множестве значений размерности квантования вероятностных мер на метрическом компакте". *Сибирский математический журнал.* **63**:5 (2022), 1074—1080.

[4] А.В. Иванов. "О промежуточных значениях емкостных размерностей". *Сибирский математический журнал.* **64**:3 (2023), 540—545.

Об универсальных отмеченных пространствах (некоторые вопросы)

Илиадис, С.
Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
s.d.iliadis@gmail.com

Все рассматриваемые пространства предполагаются T_0-пространствами веса $\leq \tau$, где τ — некоторый **фиксированный бесконечный кардинал**. Через ω обозначается первый бесконечный кардинал. Любой кардинал ν рассматривается как наименьший ординал мощности ν.

Топологическое пространство X с фиксированной на нем точкой a^X, называется *отмеченным пространством* и обозначается через (X, a^X). Классы отмеченных пространств обозначаются через $(\mathbb{S}, *)$. При этом $\mathbb{S}$ есть класс пространств X, для которых существует отмеченное пространство (X, a^X), возможно не однозначно определенное, принадлежащее $(\mathbb{S}, *)$.

Пусть $(\mathbb{S}, *)$ — класс пространств. Буем говорить, что отмеченное пространство (T, a^T) является *универсальным в классе* $(\mathbb{S}, *)$ если: (a) $(T, a^T) \in (\mathbb{S}, *)$ и (b) для любого элемента $(X, a^X) \in (\mathbb{S}, *)$ существует такое вложение i_T^X пространства X в T, что $i_T^X(a^X) = a^T$ (в этом случае будем говорить также, что (X, a^X) *может быть вложено в* (T, a^T)). Если только условие (b) выполнено, то тогда (T, a^T) называется *содержащем отмеченным пространством для* $(\mathbb{S}, *)$.

Из однородности Гильбертого пространства I^ω (см. [6]) и его универсальности в классе всех сепарабельных метризуемых пространств вытекает, что для любой его точки $a \in I^\omega$, отмеченное пространство (I^ω, a) является универсальным в классе всех отмеченных сепарабельных метризуемых пространств. Аналогично, из однородности Тихоновского куба I^τ и его универсальности в классе всех вполне регулярных пространств вытекает, что для любой его точки $a \in I^\tau$, отмеченное пространство (I^τ, a) является универсалным отмеченным пространством в классе всех отмеченных вполне реулярных пространств.

Заметим, что хотя Александровский куб C^τ (т.е. произведение τ штук связных двоеточий (см. [1]) является универсальным в классе всех пространств, к нему нельзя применить предыдущие рассуждения, относительно гильбертого и тихоновского кубов, поскольку он не однороден. Отсюда, возникают следующие два вопроса:

Вопрос 1. Существует ли в классе всех отмеченных пространств универсальный элемент?

Вопрос 2. Существует ли точка a Александровского куба C^τ, для которой отмеченное пространство (C^τ, a) было бы универсальным в классе всех отмеченных пространств?

В статье [5] доказано общим методом существование универсальных элементов в следующих классах отмеченных пространств:

[1∗] класс всех отмеченных пространств (X, a^X), для которых $\{a^X\}$ замкнуто в X;

[2∗] класс всех отмеченных регулярных пространств;

[3∗] класс всех отмеченных вполне регулярных пространств;

[4∗] класс всех элементов $(X, a^X) \in [1*]$, для которых $ind(X) \leq \alpha \in \tau$;

[5∗] класс всех элементов $(X, a^X) \in [2*]$, для которых $ind(X) \leq \alpha \in \tau$;

[6∗] класс всех элементов $(X, a^X) \in [3*]$, для которых $ind(X) \leq \alpha \in \tau$;

[7∗] класс всех элементов $(X, a^X) \in [1*]$, где X — ν-мерное пространство и $\omega \leq \nu \leq \tau$;

[8∗] любое пересечение класса [7∗] с одним из классов [2∗] − [6∗].

Напомним, что пространство X называется *ν-мерным* (соответственно, *сильно ν-мерным*) если X можно представить как: $X = \cup\{X_\delta : \delta \in \nu\}$, где X_δ — нульмерное (соответственно, X_δ — замкнутое и конечномерное) в смысле размерности ind подпространство. (Эти пространства были введены в книге [4], где и построены универсальные элементы для классов таких пространств.) Для $\nu = \omega$ эти пространства являются модификацией *счетно-мерных* (соответственно, *сильно счетномерных*) пространств, которые определены с помощью размерности dim (см. [3], [10], [2]). Универсальные элементы для классов таких постранств построены в работах [7], [8], [9]. В связи с вышеизложенным возникают следующие вопросы:

Вопрос 3. Существуют ли универсальные элементы в классе [9∗] всех отмеченных сильно ν-мерных пространств, $\omega \leq \nu \leq \tau$?

Вопрос 4. Существуют ли универсальные элементы в классе [10∗] всех отмеченных замкнутой точкой, сильно ν-мерных пространств, $\omega \leq \nu \leq \tau$?

Вопрос 5. Существуют ли универсальные элементы в классах, которые являются пересечением одного из классов [9∗] и [10∗] с одним из классов [2∗]-[6∗]?

Наряду с отмеченными пространствами, где фиксированна некоторая точка, рассмотрим пространства где фиксируется некоторое подпространство, одно и то же для всех пространств. Более точно это можно сформулировать следующим образом. Пусть K — топологическое пространство. Пара (X, i_X), где X-пространство и i_X-вложение пространства K в X назовем K-отмеченным пространством. Классы K-отмеченных пространств будем обозначать через $(\mathbb{S}, K)$, где $\mathbb{S}$ — класс всех тех пространств, для которых существует элемент $(X, i_X) \in (\mathbb{S}, K)$ (возможно не однозначно определенный). K-отмеченное пространство (T, i_T) назовем *универсальным в классе* $(\mathbb{S}, K)$, если $(T, i_T) \in (\mathbb{S}, K)$ и для любого $(X, i_X) \in (\mathbb{S}, K)$ существует вложение e_T^X пространства X в T такое, что $i_T = e_T^X \circ i_X$.

Интересен случай когда K — компактное пространство. Так например, когда K является метризуемым компактом, то в классе всех K-отмеченных сепарабельных метризуемых пространств существует универсальный элемент. Таким элементом будет K-отмеченное пространство $(\mathbf{U}, i_\mathbf{U})$, где $\mathbf{U}$ — универсальное метрическое пространство Урысона, а $i_\mathbf{U}$ — любое вложение компакта K в $\mathbf{U}$. Это вытекает из известных своиств пространства $\mathbf{U}$. Таким образом, естественно возникают следующие вопросы (всюду K — компакт).

Вопрос 6. Существуют ли универсальные элементы в классе всех K-отмеченных пространств?

Вопрос 7. Существуют ли универсальные элементы в классе $[i*, K]$, $i = 1-10$, получающиися из класса $[i*]$ заменой отмеченного пространства на K-отмеченного пространства и замкнутость точки на замкнутое вложение компакта K?

Интересен также случай, когда рассматриваются K-отмеченные пространства (X, i_X), где K -дискретное пространство, а i_X — замкнутое вложение пространства K в X. Для этого случая также можно поставить вопросы 6 и 7.

Список литературы

[1] П. С. Александров. “О теории топологических пространств”. *ДАН СССР.* **2** (1936), 51–54 (Russian).

[2] Ryczard Engelking and Elzbieta Pol. *Countable-dimensional spaces: A survey.* Dissertationes Mathematicae, CCXVI, 1–41.

[3] W. Hurewicz. “Ueber inendlich-dimensionale Punktmengen”. *Proc. Akad. Amsterdam.* **31** (1928), 916–922.

[4] S. D. Iliadis, “Universal Spaces and Mappings”. *North-Holland Mathematics Studies.* **198**, Elsevier (2005).

[5] Stavros Iliadis. *Universal marked spaces*, в печати.

[6] O. H. Keller. “Die Homoiomorphie der kompakten konvexenMengen in Hilbertschen Raum”. *Math. Ann.* **105** (1931), 748–758.

[7] J. Nagata. “On the countable sum of zero-dimensional metric spaces”. *Fund. Math.* **48**: 1 (1960), 1–14.

[8] J. Nagata. “A remark on general embedding theorems in dimension theory”. *Proc. Japan Acad.* **39** (1963), 197–199.

[9] Ю. М. Смирнов. “Об универсальных пространствах для некоторых классов бесконечномерных пространств”. *Изв. АН СССР. Сер. матем.* **23**: 2 (1959), 185–196

[10] P. Urysohn. “Memoire sur les multiplisites Cantoriennes (suite)”. *Fund. Math.* **8** (1926), 225–359.

О равномерно паракомпактных отображениях

Канетов Б.Э., Канетова Д.Э., Бекназарова М.К.
Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызстан
Центрально Азиатский международный медицинский университет, Жалал-Абад, Кыргызстан
Жалал-Абадский государственный университет имени Б. Осмонова, Жалал-Абад, Кыргызстан
bekbolot_kanetov@mail.ru, dinara_kg@mail.ru, maxabat.beknazarova@mail.ru

В последнее время многие понятия и утверждения равномерной топологии были распространены со случая пространств на случай равномерно непрерывных отображений. При этом равномерное пространство понимается как простейшее равномерно непрерывное отображение этого равномерного пространства в одноточечное пространство.

Проведенные исследования выявили большие равномерные аналоги непрерывных отображений и позволили перенести на отображения многие основные утверждения равномерной топологии пространств в работах А.А. Борубаева [1], А.С. Мищенко [2], Б.Э. Канетова [3] и других. Метод перенесения результатов с пространств на отображения является универсальным, и не простым, но позволяющий многие результаты обобщить. Поэтому задача распространения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств на отображения, до сих пор не решена полностью.

В настоящей работе, на отображения распространяются равномерно паракомпактные [5] и сильно равномерно паракомпактные [3] свойства равномерных пространств.

Пусть $f : (X, U) \to (Y, V)$- равномерно непрерывное отображение равномерного пространства (X, U) на равномерное пространство (Y, V).

Отображение f называется равномерно паракомпактным (сильно равномерно паракомпактным) отображением, если для любого открытого покрытия α равномерного пространства (X, U) существуют такие открытое покрытие β равномерного пространства (Y, V) и равномерно σ-локально (равномерно σ -звездно) конечное открытое покрытие γ пространства (X, U), что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$.

Заметим, что если $f : (X, U) \to (Y, V)$ -(сильно) равномерно паракомпактное отображение и $Y = \{y\}$, то равномерное пространство (X, U) является (сильно) равномерно паракомпактным пространством.

Непрерывное отображение $f : (X, \tau) \to (Y, \mu)$ топологического пространства (X, τ) на топологическое пространство (Y, μ) будем называть паракомпактным (сильно паракомпактным) отображением, если для любого открытого покрытия α пространства (X, τ) существуют такие открытое покрытие β пространства (Y, μ) и σ -локально (звездно) конечное открытое покрытие γ пространства (X, τ), что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$.

Теорема 1. Если $f : (X, U) \to (Y, V)$ -(сильно) равномерно паракомпактное отображение, то непрерывное отображение $f : (X, \tau_U) \to (Y, \mu_V)$ является (сильно) паракомпактным отображением, обратно, если непрерывное отображение $f : (X, \tau) \to (Y, \mu)$ является (сильно) паракомпактным отображением, то равномерно непрерывное отображение $f : (X, U_X) \to (Y, V_Y)$ является (сильно) равномерно паракомпактным отображением, где U_X и V_Y универсальные равномерности на X и Y соответственно.

Теорема 2. Если отображение f и пространство (Y, V) (сильно) равномерно паракомпактны, то пространство (X, U) является таким же. Обратно, если (X, U) (сильно) равномерно паракомпактное пространтсво, то отображение f является (сильно) равномерно паракомпактным отображением.

Список литературы

[1] А.А. Борубаев. "Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения". Фрунзе: Илим, 1990. 172 с.

[2] А.С. Мищенко. "О равномерно замкнутых отображениях". *Fund. Math.* **58** (1966), 185–208.

[3] Б.Э. Канетов. "Некоторые классы равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений". Бишкек, 2013. 160 с.

[4] Б.А. Пасынков. "О распространении на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств". *Отображения и функторы.* Москва: МГУ, 1984. 72–102.

[5] D. Buhagiar, B.A. Pasynkov. "On uniform paracompactness". *Czech. Math. J.* **46(121)** (1996), 577–586.

О равномерно линделёфовых пространствах

Канетова Д.Э., Канетов Б.Э.
Центрально Азиатский международный медицинский университет, Жалал-Абад, Кыргызстан
Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызстан
dinara_kg@mail.ru, bekbolot_kanetov@mail.ru

Линделёфова пространства являются одними из важнейших понятий обшей топологии. Существуют различные подходы к определению равномерной линделёфовости равномерных пространств, например, равномерная B-линделёфовость в смысле А.А. Борубаева [1], равномерная I-линделёфовость в смысле Дж. Исбелла [2], равномерная A-линделёфовость в смысле Л.В. Апариной [3], равномерная K-линделёфовость в смысле Б.Э. Канетова [4].

В данной работе исследуются равномерно B-линделёфовы пространства, изучена их связь с другими свойствами типа равномерной компактности, а также установлены характеристики этих классов равномерных пространств при помощи отображений и компактификаций.

Напомним [1], что равномерное пространство (X, U) называется равномерно B-линделёфовым, если оно является равномерно B-паракомпактным и $\aleph_0$-ограниченным пространством.

Всякое сепарабельно метризуемое равномерное пространство (X, U) является равномерно B-линделёфовым, а последнее является сильно равномерно B-паракомпактным. Если (X, U) - равномерно B-линделёфово, то его топологическое пространство (X, τ_U) - линделёфово. Обратно, если (X, τ) - линделёфово пространство, то равномерное пространство (X, U_X) равномерно B-линделёфово, где U_X - универсальная равномерность пространства X.

В следующей теореме решается проблема, поставленная А.А. Борубаевым: Каковы те равномерные пространства, которые для любого открытого покрытия ω обладают равномерно непрерывным ω -отображением на некоторое сепарабельно метризуемое равномерное пространство?

Теорема 1. Равномерное пространство (X, U) является равномерно B -линделёфовым тогда и только тогда, когда для каждого открытого покрытия ω пространства (X, U) существует равномерно непрерывное ω -отображение f равномерного пространства (X, U) на некоторое сепарабельно метризуемое равномерное пространство (X, Y).

Предложение 3. Для равномерного пространства (X, U) следующие условия эквивалентны:

1. (X, U) – равномерно B -линделёфово;
2. (X, U) – равномерно P -паракомпактно и $\aleph_0$ -ограничено;
3. (X, U) – равномерно F -паракомпактно и $\aleph_0$ -ограничено.

Равномерная B -линделёфовость не является равномерным инвариантом при равномерно совершенных отображениях. Однако имеют места следующие

Теорема 2. Прообраз равномерно B -линделёфово пространства при равномерно совершенных отображениях является равномерно B -линделёфовым.

Теорема 3. Образ равномерно B -линделефового пространства при равномерно открытых равномерно совершенных отображениях является равномерно B -линделёфовым пространством.

Список литературы

[1] А.А. Борубаев. "Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения". Фрунзе: Илим, 1990.

[2] J. Isbell. "Uniform space". Providence, 1964. 175 p.

[3] Л.В. Апарина. "Равномерно линделёфовы пространства". *Тр. Моск. мат. о-ва.* **57** (1996), 3–15.

[4] Б.Э. Канетов. "Некоторые классы равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений". Бишкек: КНУ им. Ж. Баласагына, 2013.

О пространствах функционалов с конечным носителем

Лазарев В.Р.
Томский государственный университет, Томск, Россия
lazarev@math.tsu.ru

1. Введение

Для тихоновского пространства X обозначим через $C_p(X)$ множество всех непрерывных функций $\varphi : X \to \mathbb{R}$ с топологией поточечной сходимости. Всякую непрерывную функцию $f : C_p(X) \to \mathbb{R}$ со свойством $f(0^X) = 0$, где $0^X(x) = 0$ для всех $x \in X$, будем называть функционалом. Подпространство в $C_p(C_p(X))$ образованное всеми функционалами обозначим символом $C_p^0 C_p(X)$. Хорошо известно, что каноническое отображение вычисления гомеоморфно вкладывает пространство X в $C_p^0 C_p(X)$.

Если каждому тихоновскому пространству X поставлено в соответствие некоторое подпространство $E(X) \subset C_p^0 C_p(X)$, то этим определён некоторый класс H гомеоморфизмов пространств непрерывных функций. Именно, гомеоморфизм $h : C_p(X) \to C_p(Y)$ принадлежит H тогда и только тогда, когда сопряжённое отображение h^* обладает свойством

$$h^*(Y) \subset E(X) \text{ и } (h^{-1})^*(X) \subset E(Y).$$

При $E(X) = L_p(X)$ получаем определение класса линейных гомеоморфизмов пространств непрерывных функций.

В [1] рассматриваются более широкие, чем $L_p(X)$, пространства функционалов $\hat{L}_p(X)$ и $FS(X)$, порождающие, следовательно, более широкие классы гомеоморфизмов пространств функций, чем класс линейных гомеоморфизмов.

2. Функционалы с конечным носителем

За определением пространства $FS(X)$ функционалов с конечным носителем читатель может обратиться к статье [1]. Приведём здесь определение его подпространства $\hat{L}_p(X)$.

Определение 2.1. Обозначим символом $\hat{L}_p(X)$ множество всех функционалов с конечным носителем, удовлетворяющих условиям:
(а) Если $f(\varphi) \neq 0$, то существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $|f(n \cdot \varphi)| \geq 1$ при $n \geq n_0$;
(б) Если $|f(n \cdot \varphi)| \geq 1$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, то $f(\varphi) \neq 0$.

Замечание 2.2. Обозначение $\hat{L}_p(X)$ мотивировано тем, что каждый линейный непрерывный функционал $f \in L_p(X)$ принадлежит $FS(X)$ и удовлетворяет условиям (а), (б).

Замечание 2.3. Определение функционала с конечным носителем (см. [1]) влечёт, что каждый такой функционал имеет единственный носитель. Ниже предполагается, что каждое конечное подмножество в X наделено некоторым вполне упорядочением.

Теорема 2.4. (Общий вид функционала с конечным носителем) Пусть $f \in C_p^0 C_p(X)$. Функционал f имеет конечный носитель тогда и только тогда, когда существует конечное подмножество $K_f \subset X$ такое, что

$$f(\varphi) = u_f(\pi_f(\varphi)),$$

где $\pi_f : C_p(X) \to \mathbb{R}^{|K_f|}$ - оператор сужения на K_f, а функция $u_f : \mathbb{R}^{|K_f|} \to \mathbb{R}$ обладает свойствами:
(1) $u_f(0) = 0$;
(2) Для любого фиксированного $r_0 \in \mathbb{R}$ и для любого $i \in \{1, 2, ..., |K_f|\}$ функция $u_f^i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u_f^i(r) = u_f(r_0, ..., r_0, r, r_0 ..., r_0)$, где r на i-том месте, не постоянна.

Следствие 2.5. Функционал f линеен и непрерывен тогда и только тогда, когда функция u_f линейна.

3. Сравнение классов функционалов с конечным носителем

Из определений пространств $FS(X)$, $\hat{L}_p(X)$ следует цепочка включений:

$$L_p(X) \subset \hat{L}_p(X) \subset FS(X) \subset C_p^0 C_p(X). \qquad (*)$$

Теорема 2.4 позволяет привести примеры, показывающие, что первые два включения в $(*)$ являются строгими.

Примеры. 3.1. Фиксируем произвольную точку $x \in X$. Тогда $f = u_f \circ \pi_f \in \hat{L}_p(X) \setminus L_p(X)$, если положить $K_f = \{x\}, u_f(r) = |r|$. Это вытекает из теоремы 2.4 и следствия 2.5.

3.2. Определим функционал f аналогично примеру 3.1 с тем отличием, что $u_f(r) = \sin r \cdot \chi_{[0;\pi]}$. Тогда $f = u_f \circ \pi_f \in FS(X) \setminus \hat{L}_p(X)$. Это следует из того, что нарушается условие (а) определения 2.1.

Пример, показывающий строгость последнего включения в $(*)$ найден в [2].

Более глубокие различия между рассмотренными классами функционалов с конечным носителем описывает следующая

Теорема 3.3. 1) Пространство $FS(X)$ всюду плотно в $C_p^0 C_p(X)$;
2) Пространства $L_p(X)$, $\hat{L}_p(X)$ нигде не плотны в $C_p^0 C_p(X)$;
3) Пространство $\hat{L}_p(X) + \hat{L}_p(X)$ всюду плотно в $C_p^0 C_p(X)$.

4. Выводы и вопросы

Обозначим классы гомеоморфизмов, порождаемые пространствами функционалов $L_p(X)$, $\hat{L}_p(X)$, $FS(X)$, $C_p^0 C_p(X)$ соответственно через LH, $\hat{L}H$, FSH, и H^0. Тогда можем записать

$$LH \subset \hat{L}H \subset FSH \subset H^0.$$

Класс $\hat{L}H$ интересен тем, что (см. [1]) если гомеоморфизм h, $h : C_p(X) \to C_p(Y)$ принадлежит классу $\hat{L}H$, то числа Линделёфа пространств X, Y равны: $l(X) = l(Y)$. Это обобщает теорему А. Бузиада [3] о линейных гомеоморфизмах, которая, в свою очередь, обобщает теорему Н.В. Величко [4] о свойстве Линделёфа. Пункт 3) тоеремы 3.3 показывает, что класс $\hat{L}H$ существенно шире класса LH.

Вопрос 4.1. Сохраняется ли число (свойство) Линделёфа гомеоморфизмами класса FSH?

Заметим, что кардинальный инвариант $l^*(X) = \sup\{l(X^n) : n \in \mathbb{N}\}$ сохраняется, согласно теореме А.В. Архангельского - Е.Г. Пыткеева, произвольными гомеоморфизмами пространств функций (см. например [5], теорема II.I.1).

Вопрос 4.2. Привести пример не l-эквивалентных пространств X, Y, для которых существует гомеоморфизм $h : C_p(X) \to C_p(Y)$, где $h \in \hat{L}H$.

Вопрос 4.3. Замкнуто ли подпространство $\hat{L}_p(X)$ в $C_p^0 C_p(X)$?

Список литературы

[1] V. R. Lazarev. "On a class of homeomorphisms of function spaces preserving the Lindelöf number of domains". *Вестник ТГУ. Математика и механика.* **86**: (2023), 159–166.

[2] В. С. Аметова, В. Р. Лазарев. "О свойстве конечного носителя гомеоморфизма Гулько - Хмылёвой". *Вестник ТГУ. Математика и механика.* **80**: (2022), 5–15.

[3] A. Bouziad. "Le degré de Lindelöf est l-invariant". *Proceedings of the American Mathematical Society.* **129**: 3 (2001), 913—919.

[4] N. V. Velichko. "The Lindelöf property is 1-invariant". *Topol. Appl.* **89**: (1998), 277–283.

[5] А. В. Архангельский. "Топологические пространства функций". М. МГУ. 1989.

О задаче Архангельского А.В.

Лейбо И.М.
Москва, Россия
imleibo@mail.ru

Существуют три основных размерностных инварианта IndX, dimX, indX, соотношения между которыми для различных классов пространств представляют особый интерес. Тумаркин Л.А. и В. Гуревич доказали совпадение этих размерностей для любых метрических пространств со счетной базой.

Так как каждая база является сетью, то совершенно естественым является вопрос А.В. Архангельского о равенстве размерностей для пространств со счетной сетью. В общем случае ответ на этот вопрос отрицательный. Пространство со счетной сетью и с несовпадающими размерностями построил Michael G. Charalambous в аксиоматике ZFC. Архангельский уточнил свой вопрос: будут ли совпадать размерности для пространства со счетной сетью и с первой аксиомой счетности? В силу теоремы Архангельского пространства со счетной сетью и с первой аксиомой счетности всегда имеют семиметрику, порождающую топологию исходного пространства, т.е. семиметризуемы. Теорема 1 дает частичный положительный ответ на вопрос Архангельского, а именно, равенства IndX=dimX=indX выполняются для пространства со счетной сетью, с первой аксиомой счетности и с 1-непрерывной семиметрикой, т.е. с некоторой такой семиметрикой d(x,y) на пространстве X, которая непрерывна только по одной переменной.

Следующие утверждения нужны для доказательства теоремы 1 и, возможно, представляют самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Пусть X паракомпактное σ-пространство с первой аксиомой счетности. Пусть в пространстве X есть σ -дискретная сеть из замкнутых множеств $\gamma=\{F_\alpha\colon \alpha\in A,\ A=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\}$, система $\gamma_i=\{F_\alpha\colon\alpha\in A_i\}$ дискретна в X для каждого i=1,2, ... Тогда в X существует такое метрическое подмножество M, что M всюду плотно в X и $M\bigcap F_\alpha$ всюду плотно в F_α для каждого $\alpha\in A$.*

В работе [1, теорема 2.8] Архангельский предложил метод построения семиметрики d(x,y) на T_1 σ-пространстве X с первой аксиомой счетности, используя который получаем лемму 2.

Лемма 2. *Пусть X паракомпактное σ-пространство с первой аксиомой счетности и с σ -дискретной сетью из замкнутых множеств. Тогда на пространстве X существует семиметрика d(x,y) такая, что на указанном в лемме 1 подмножестве M эта семиметрика d(x,y) будет метрикой.*

Такая семиметрика на паракомпактном σ-пространстве с первой аксиомой счетности называется семиметрикой Архангельского. Отметим, что семиметрикой Архангельского на паракомпактном σ-пространстве с первой аксиомой счетности всегда существует.

Теорема 1.[2] *Пусть X паракомпактное σ-пространство с первой аксиомой*

счетности, в котором семиметрика Архангельского d(x,y) 1-непрерывна. Тогда следующие условия эквивалентны:
a). dimX$\leq$ n.
b). IndX$\leq$ n.
c). X=$\bigcup X_i$, i=1,2,...n+1, где каждое множество X_i является G_δ множеством и dim$X_i \leq 0$ для i=1,2,...n+1.
d). пространство X является совершенным $\leq(n+1)$ - кратным образом нульмерного в смысле dim паракомпактного σ-пространства с первой аксиомой счетности, другими словами, существует паракомпактное σ-пространство с первой аксиомой счетности X_0, dimX_0=0, и существует замкнутое отображение f:$X_0 \longrightarrow$ X такое, что $|f^{-1}$(x)|$\leq$n+1.

Из теоремы 1 как следствие получаем теорему 2.

Теорема 2. *Пусть X пространство Нагаты (т.е. кружевное с первой аксиомой счетности), в котором семиметрика Архангельского d(x,y) 1-непрерывна. Тогда следующие условия эквивалентны:*
a). dimX$\leq$ n.
b). IndX$\leq$ n.
c). X=$\bigcup X_i$, i=1,2,...n+1, где каждое множество X_i является G_δ множеством и dim$X_i \leq 0$ для i=1,2,...n+1.
d). пространство X является совершенным $\leq(n+1)$ - кратным образом нульмерного в смысле dim паракомпактного σ-пространства с первой аксиомой счетности, другими словами, существует паракомпактное σ-пространство с первой аксиомой счетности X_0, dimX_0=0, и существует замкнутое отображение f:$X_0 \longrightarrow$ X такое, что $|f^{-1}$(x)|$\leq$n+1.

Можно показать, что для пункта (d) в теореме 2 верно следующее:

d). пространство X является совершенным $\leq$n+1 – кратным образом нульмерного в смысле dim пространства Нагаты с 1-непрерывной семиметрикой.

Список литературы

[1] А. В. Архангельский. "Отображения и пространства". *Успехи математических наук.* **21**: 4 (1966), 133-184.

[2] И. М. Лейбо. "О равенстве размерностей для некоторых паракомпактных σ-пространств". *Математические заметки.* **113**: 4 (2023), 499–516.

Разложимость и обобщения компактности

Липин А.Е.
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Уральский Федеральный Университет, Екатеринбург, Россия
tony.lipin@yandex.ru

Под пространствами везде далее понимаются топологические пространства без изолированных точек.

Определение (E. Hewitt, 1943 [3]; М. Катетов, 1947 [11]; J.G. Ceder, 1964 [1]). Пусть κ — кардинал. Пространство, которое возможно разбить на κ плотных подмножеств, называется *κ-разложимым*.

Необходимым условием κ-разложимости пространства X является неравенство $\kappa \leq \Delta(X)$, где $\Delta(X)$ — *дисперсионный характер* пространства X, тот есть минимум мощностей непустых открытых в X множеств.

Пространство X называют *максимально разложимым*, если оно $\Delta(X)$-разложимо. Пространство X называют *κ-неразложимым*, если $\kappa \leq \Delta(X)$, но X не κ-разложимо. Кроме того, 2-(не)разложимые пространства также называют *(не)разложимыми*.

Получить больше сведений о разложимости можно в обзоре [9]. Известно, что:

1. Компакты максимально разложимы [1];
2. Существует хаусдорфово неразложимое счетно компактное пространство [7], но регулярные счетно компактные пространства ω_1-разложимы [10];
3. Существуют счетные нормальные неразложимые пространства [3];
4. Существует хаусдорфово неразложимое σ-компактное пространство несчетного дисперсионного характера [7], но регулярные линделёфовы пространства несчетного дисперсионного характера ω-разложимы [6];
5. С ZFC совместно утверждение, что все тихоновские псевдокомпакты $\mathfrak{c}$-разложимы [5];
6. Существует хаусдорфово связное неразложимое пространство [8];
7. Тихоновские локально связные пространства $\mathfrak{c}$-разложимы [4], а регулярные — ω-разложимы [2].

Среди открытых вопросов можно указать следующие (в классах регулярных, тихоновских и нормальных пространств):

(a) всякое ли счетно компактное пространство максимально разложимо?

(b) всякое ли линделёфово пространство несчетного дисперсионного характера максимально разложимо?

(c) может ли ZFC доказать разложимость псевдокомпакта?

(d) разложимо ли связное пространство?

Мы представляем следующие результаты.

Теорема 1. *Если X — регулярное линделёфово пространство, $|X| = \Delta(X)$ и $\mathrm{cf}|X| \neq \omega$, то X максимально разложимо.*

Теорема 2. *Если X — регулярное счетно компактное пространство, $|X| = \Delta(X)$ и $\mathrm{cf}|X| = \omega$, то X максимально разложимо.*

Теорема 3. *ZFC не может доказать максимальную разложимость тихоновского глобально и локально связного псевдокомпактного пространства.*

Список литературы

[1] J.G. Ceder. "On maximally resolvable spaces". *Fundamenta Mathematicae.* **55** (1964), 87–93.

[2] C. Costantini. "On the resolvability of locally connected spaces". *Proc. Amer. Math. Soc.* **133**: 6 (2005), 1861–1864.

[3] E. Hewitt. "A problem in set theoretic topology". *Duke Math. J.* **10** (1943), 309–333.

[4] I. Juhasz, J. van Mill. "Nowhere constant families of maps and resolvability". http://arxiv.org/abs/2312.12257v1

[5] I. Juhasz, L. Soukup, Z. Szentmiklossy. "Coloring Cantor sets and resolvability of pseudocompact spaces". *Comment.Math.Univ.Carolin.* **59**: 4 (2018), 523–529.

[6] I. Juhasz, L. Soukup, Z. Szentmiklossy. "Regular spaces of small extent are ω-resolvable". *Fundamenta Mathematicae.* **228**: 1 (2013), 27–46.

[7] V.I. Malykhin. "Borel resolvability of compact spaces and their subspaces". *Mathematical Notes.* **64**: 5 (1998), 607–615.

[8] K. Padmavally. "An example of a connected irresolvable Hausdorff space". *Duke Math. J.* **20** (1953), 513–520.

[9] O. Pavlov. "Problems on (ir)resolvability". *Open Problems in Topology II.* (2007), Elsevier B.V.

[10] E.G. Pytkeev. "Resolvability of countably compact regular spaces". *Alg., Top., Math. Anal., Proc. Steklov Inst. Math.* **2** (2002), S152–S154.

[11] М. Катетов. "О пространствах, не содержащих непересекающихся плотных множеств". *Матем. сб.* **21**(63): 1 (1947), 3–12.

Функциональные характеризации нормальных отображений.[1]

Лисеев М.Ю.
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, каф. Общей топологии и геометрии., Москва, Российская Федерация
liseev.mikhail@gmail.com

Послойная общая топология (также называемая топологией непрерывных отображений) развивается на базе общей и алгебраической топологий. Идея распространения на отображения топологических свойств пространств ("от пространств — к отображениям"), была сформулирована Б. А. Пасынковым в работе [1] и инициировала многочисленные исследования. Доклад посвящен функциональному подходу к решению задач, связанных с распространением на отображения свойств нормальности, предложенных автору Б. А. Пасынковым. В частности, распространение на отображения теоремы Брауэра–Титце–Урысона о продолжении функций с замкнутых подмножеств нормальных пространств, введения на отображениях понятия совершенной нормальности отображения и выяснения когда выполняется аналог "леммы Веденисова" [2] для отображений.

Под пространством понимается топологическое пространство, отображение f всюду ниже обозначает непрерывное отображение пространств, τ_X — топология пространства X. Подмножества A, B пространства X называются *отделимыми окрестностями в подпространстве X' пространства X* [1, стр. 73], если множества $A \cap X'$ и $B \cap X'$ имеют в X' дизъюнктные окрестности. Для отображения $f : X \to Y$ множества $A, B \subset X$ называются *f−отделимыми окрестностями* [1, стр. 73], если любая точка $y \in Y$ обладает окрестностью $\mathcal{O}y$, в прообразе $f^{-1}\mathcal{O}y$ которой множества A и B отделимы окрестностями.

Отображение $f : X \to Y$ *преднормально* [1, стр. 73], если любые два дизъюнктных замкнутых подмножества A и B пространства X f–отделимы окрестностями. Отображение $f : X \to Y$ *нормально* [3, стр. 52], если для любого $\mathcal{O} \in \tau_Y$ сужение $f_{\mathcal{O}} : f^{-1}\mathcal{O} \to \mathcal{O}$ отображения f на $\mathcal{O}$ преднормально. Для отображения $f : X \to Y$ ограниченная функция $\varphi : X \to \mathbb{R}$ называется *f–непрерывной в точке $y \in Y$*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $\mathcal{O}y$ точки y, что $\mathrm{osc}_\varphi(f^{-1}\mathcal{O}y) < \varepsilon$. Где $\mathrm{osc}_\varphi(x) = \inf\{\sup\limits_{y \in U} |\varphi(x) - \varphi(y)| : U \in \mathcal{N}(x)\}$ обозначает *колебание ограниченной функции $\varphi : X \to \mathbb{R}$ в точке $x \in X$*.

Доказательство леммы Урысона для отображений (впервые сформулированная в следствии [4, Теорема 3.1]) состоит в явном построении f–непрерывной

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075-15-2019-1621» / «The research was carried with the financial support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation as part of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the agreement №075-15-2019-1621.

функции, разделяющей дизъюнктные замкнутые подотображения, где непрерывная на “предельном слое” отображения функция, может быть получена за счет ее приближения ступенчатыми функциями, которые принимают на слоях отображения, не содержащихся в G_δ окрестности предельного слоя, конечное число значений. Эквивалентной характеризацией нормальности отображения является

Теорема (Брауэра–Титце–Урысона для отображений.) *Пусть отображение $f : X \to Y$ нормально, $\mathcal{O} \in \tau_Y$, $y \in \mathcal{O}$, $f|_F : F \to \mathcal{O}$ замкнутое подотображение отображения $f_{\mathcal{O}} : f^{-1}\mathcal{O} \to \mathcal{O}$ и $\varphi : F \to \mathbb{R}$ $f|_F$–непрерывная в точке y функция. Тогда существуют окрестность $\mathcal{O}y \subset \mathcal{O}$ точки y и $f|_{f^{-1}\mathcal{O}y}$–непрерывная в точке y функция $\tilde{\varphi} : f^{-1}\mathcal{O}y \to \mathbb{R}$ для отображения $f_{\mathcal{O}y} : f^{-1}\mathcal{O}y \to \mathcal{O}y$ такая, что $\tilde{\varphi}|_{F\cap f^{-1}G} = \varphi|_{F\cap f^{-1}G}$, где G — G_δ–подмножество $\mathcal{O}y$ и $y \in G$, в частности $\tilde{\varphi}|_{F\cap f^{-1}y} = \varphi|_{F\cap f^{-1}y}$, $||\tilde{\varphi}|| \leqslant ||\varphi||$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $\mathcal{O}(\varepsilon) \subset \mathcal{O}y$ точки y такая, что $||\tilde{\varphi}|_{F\cap f^{-1}\mathcal{O}(\varepsilon)} - \varphi|_{F\cap f^{-1}\mathcal{O}(\varepsilon)}|| < \varepsilon$.*

Отображение $f : X \to Y$ *σ–преднормально*, если для любых F_σ–множества $T = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i$ (подмножество F_i–замкнуто в X), и замкнутого в X подмножества F таких, что $T \cap F = \varnothing$ и любой точки $y \in Y$ существуют её окрестность $\mathcal{O}y$ и такое семейство открытых в $f^{-1}\mathcal{O}y$ множеств $\{\mathcal{O}_i\}_{i=1}^{\infty}$, что $\mathcal{O}_i \supset F_i \cap f^{-1}\mathcal{O}y$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{cl}_{f^{-1}\mathcal{O}y}(\mathcal{O}_i) \cap F = \varnothing$, $i \in \mathbb{N}$. Отображение f *σ–нормально* [5, Определение 7], если отображение $f_{\mathcal{O}} : f^{-1}\mathcal{O} \to \mathcal{O}$ — σ–преднормально для всех $\mathcal{O} \in \tau_Y$.

Функциональная характеризация σ–нормальности отображения строится аналогично лемме Урысона для отображений, но использует счетное семейство согласованных f–непрерывных функций.

σ–нормальное отображение $f : X \to Y$ называется *co-σ–совершенно нормальным отображением* [5, определение 9], если любое его открытое подотображение $f|_{X_0} : X_0 \to Y$ имеет тип F_σ. Отметим, что любое *co-σ*–совершенно нормальное отображение *co*–наследственно нормально [5, Теорема 14], а также, что любое подотображение *co-σ*–совершенно нормального отображения *co*–совершенно нормально [5, Следствие 15].

Подотображение $f|_A : A \to Y$ отображения $f : X \to Y$ называется *f–функционально открытым*, если для любой точки y найдутся такие окрестность $\mathcal{O}y$ и f–непрерывная функция $\varphi : f^{-1}\mathcal{O}y \to [0,1]$, что $f^{-1}\mathcal{O}y \cap A = \varphi^{-1}(0,1]$.

Следующий результат является частичным распространением на отображения Леммы Веденисова, характеризующей совершенную нормальность топологических пространств.

Теорема (функциональная характеризация *co-σ*–совершенной нормальности отображения) *Отображение $f : X \to Y$ co-σ–совершенно нормально в том и только в том случае, если для любого $\mathcal{O} \in \tau_Y$, любого открытого подмножества $O \subset f^{-1}\mathcal{O}$, любой точки $y \in \mathcal{O}$ и любого счетного семейства замкнутых в $f^{-1}\mathcal{O}$ множеств $F_i \subset O$, $i \in \mathbb{N}$, существуют окрестность $\mathcal{O}y$ точки y и семейства f–непрерывных в точке y функции $\varphi_i : f^{-1}\mathcal{O}y \to [0,1]$, $i \in \mathbb{N}$, $\psi_i : f^{-1}\mathcal{O}y \to [0,1]$, $i \in \mathbb{N}$, такие, что*

(a) $\mathrm{osc}_{\varphi_i}(f^{-1}\mathcal{O}y) < \frac{1}{2}$, $\mathrm{osc}_{\psi_i}(f^{-1}\mathcal{O}y) < \frac{1}{2}$, $i \in \mathbb{N}$;

(b) $f^{-1}\mathcal{O}y \setminus O \subset \varphi_i^{-1}(0)$, $F_i \cap f^{-1}\mathcal{O}y \subset \varphi_i^{-1}(1)$, $i \in \mathbb{N}$;

(c) $f^{-1}\mathcal{O}y \setminus O \subset \psi_i^{-1}(0)$, $i \in \mathbb{N}$, $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \psi_i^{-1}(1) = f^{-1}\mathcal{O}y \cap O$.

Следствие *Пусть отображение $f : X \to Y$ со-σ–совершенно нормально. Тогда для любого открытого подотображения $f|_O : O \to Y$ (соответственно замкнутого подотображения $f|_F : F \to Y$) и любой точки $y \in Y$ существуют ее окрестность $\mathcal{O}y$ и f–непрерывная в точке y функция $\varphi : f^{-1}\mathcal{O}y \to [0,1]$ такие, что $O \cap f^{-1}\mathcal{O}y = \varphi^{-1}((0,1])$ (соответственно $F \cap f^{-1}\mathcal{O}y = \varphi^{-1}(0)$).*

Список литературы

[1] Б.А. Пасынков. "О распространении на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств". *Отображения и функторы.Сборник/Ред.кол.: П.С. Александров(гл.ред.) и др., Изд-во МГУ:Москва,* 1984, 72–102.

[2] N.B. Vedenisov. "Sur les fonctions continues dans les espaces topologiques". *Fund. Math.* **27** (1936), 234–238.

[3] Д.К. Мусаев, Б.А. Пасынков. О свойствах компактности и полноты топологических пространств и непрерывных отображений. *ФАН*, Ташкент:1994.

[4] А.Ю. Зубов. "Ростки множеств и функций в послойной общей топологии". *Фундамент. и прикл. матем.* **4**:1 (1998), 109—117.

[5] М. Ю. Лисеев. "О понятии совершенной нормальности отображения". *Вестник Кыргызского национального университета им. Жусупа Баласагына.* **2(106)** (2021), 7—18.

On the $n-$fold symmetric product of some classes of topological spaces

Nosirova M.S., Mukhamadiev F.G.
National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Faculty of Mathematics, Department of geometry and topology, Tashkent, Uzbekistan
mirsaidovamaftuna94@gmail.com, farhod8717@mail.ru

All of our space are Hausdorff unless otherwise indicated. The symbol N stands for the set of positive integers and R stands for the set of real numbers.

Given a space X, we define its hyperspaces as the following sets:

1) $CL(X) = \{A \subset X \mid A \text{ is closed and nonempty }\}$;

2) $2^X = \{A \in CL(X) \mid A \text{ is compact }\}$;

3) $\mathcal{F}_n(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ has at most } n \text{ points }\}$, $n \in N$.

$CL(X)$ is topologized by the Vietoris topology defined as the topology generated by

$\beta = \{\langle U_1, ..., U_k \mid U_1, ..., U_k \text{ are open subsets of } X,\ k \in N\rangle\}$,

where $\langle U_1, ..., U_k = \{A \in CL(X) \mid A \subset \bigcup U_j$ and $A \cap U_j \neq \emptyset$ for each $j \in \{1, ..., k\}\}$. Note that, by definition, 2^X, $\mathcal{F}_n(X)$ are subsets of $CL(X)$. Hence, they are topologized with the appropriate restriction of the Vietoris topology. $CL(X)$ is called the hyperspace of nonempty closed subsets of X. 2^X is called the hyperspace of nonempty compact subsets of X, $\mathcal{F}_n(X)$ is called the $n-$fold symmetric product of X.

A space X is *developable* [2, 3] if there exists a sequence $\{\gamma_m : m \in \mathbb{N}\}$ of open covers of X such that, for each $x \in X$, $\{st(x, \gamma_m) : m \in \mathbb{N}\}$ is a local base at x.

Such a sequence of covers is called a *development* for X. It is well known that every metrizable space is developable, and every developable space is clearly first countable.

A regular developable space is a *Moore space* [2, 3].

A family $\mathcal{U}$ is called *σ-closure preserving* [1] if it is represented as a union of countably many closure preserving subfamilies.

An *M_1-space* [2, 3] is a regular space having a σ-closure preserving base.

A collection $\mathcal{B}$ (not necessarily open) of subsets of a regular space X is a *quasi-base* [1] if whenever $x \in X$ and U is a neighbourhood of x, there exists a $B \in \mathcal{B}$ such that $x \in IntB \subset B \subset U$.

An *M_2-space* [2, 3] is a regular space having a σ-closure preserving quasi-base.

Theorem 1. If X^n is a developable space, then so is $\mathcal{F}_n(X)$.

Proposition 1. If X^n is a Moore space, then so is $\mathcal{F}_n(X)$.

Theorem 2. If X^n is an M_1-space, then so is $\mathcal{F}_n(X)$.

Theorem 3. If X^n is an M_2-space, then so is $\mathcal{F}_n(X)$.

Corollary 1. If the space X^n is stratifiable, then so is $\mathcal{F}_n(X)$.

Список литературы

[1] Edited by Klaas Pieter Hart and others. "Encyclopedia of General Topology". Elsevier Science Ltd. All rights reserved, 2004.

[2] L. D. R. Kocinac, F. G. Mukhamadiev, A. K. Sadullaev. "On the Space of $G-$Permutation Degree of Some Classes of Topological Spaces". *Mathematics.* **11(22)** (2023), 4624.

[3] L. D. R. Kocinac, F. G. Mukhamadiev, A. K. Sadullaev. "Some classes of topological spaces and the space of $G-$permutation degree". *Georgian Mathematical Journal*, 2023.

Воспоминания и размышления о топологической теории неподвижной точки (1980-2024)

Охезин В.П.
Information and quantum technologies LLC, Екатеринбург, Россия
okhezin@mail.ru

Сегодня, вспоминая нашего учителя и коллегу Евгения Георгиевича Пыткеева, мы отдаём должное уважение талантливому математику, известному специалисту по общей топологии и её приложениям. Впервые, я, будучи студентом третьего курса, познакомился с Е.Г. Пыткеевым в 1980/81 учебном году на математико-механическом факультете Уральского государственного университета. В тот год, Евгений Георгиевич читал лекции по дескриптивной теории множеств на кафедре математического анализа УрГУ. Его специальный курс назывался «Борелевские множества». Есть распространенное мнение, что общая топология это «топология контрпримеров», отчасти, с этим можно согласиться. Е.Г. Пыткеев был мастером в построении контрпримеров, и не только в топологии, но и в математике «в целом». Постановка (формулировка) и самостоятельное решение задач всегда были в фокусе педагогической и научной деятельности Евгения Георгиевича. Вместе с работой в секторе топологии ИММ УрО РАН, Пыткеев преподавал в двух ведущих университетах Екатеринбурга – классическом УрГУ и техническом УПИ. В 1986 году, Пыткеев был официальным оппонентом по моей кандидатской диссертации см.[3], посвящённой некоторым вопросам нелинейного функционального анализа и топологической теории неподвижной точки. Подробности ретроспективного и современного состояния топологической теории неподвижной точки можно посмотреть по ссылкам ниже см.[1][2][5]. В докладе приводятся задачи, обсуждаются известные и новые формулировки классических результатов теории неподвижной точки: теорема Брауэра о неподвижной точке, как теорема о том, что конус над любым компактным полиэдром обладает свойством неподвижной точки, теорема Хопфа о том, что любой связный псевдокомпакт обладает свойством квазинеподвижной точки см.[5][6] и др. Некоторые примеры нерешённых задач: 1. Описать все компактные двумерные полиэдры, обладающие свойством неподвижной точки. 2. Продолжить исследования по безлучевым пространствам (rayless spaces), описать тонко паракомпактные пространства (finely paracompact spaces) и их роль в теории неподвижной точки см.[4]. Эти и подобные задачи обсуждались, в течение последних четырёх десятилетий, с Евгением Георгиевичем Пыткеевым, светлой памяти которого посвящается эта заметка.

Список литературы

[1] J. Dugundgji and A. Granas. "Fixed Point Theory". *PWN, Warszawa.* **I** (1982).

[2] R. Manka. "The topological fixed point property – an elementary continuum-theoretic approach". *BANACH CENTER PUBLICATIONS, Warszawa.* **77** (2007), 183–200.

[3] A. Tominaga. "A note on a fixed point theorem of Okhezin". *Proc. Amer. Math. Soc.* **114** (1992), 1139–1143.

[4] Vladimir P. Okhezin. "On the fixed-point theory for non-compact maps and spaces. I". *Topological Methods in Nonlinear Analysis, Journal of the Juliusz Shauder Center.* **5** (1995), 83–100.

[5] С. Улам. "Нерешённые математические задачи". *Наука, Москва,* (1964).

[6] H.Hopf. "Freie Uberdeckungen und freie Abildungen". *Fund. Math.* **28** (1937), 33–57.

Теорема Гротендика о предкомпактности подмножеств пространств функций над псевдокомпактными пространствами

Резниченко Е.А.
МГУ им М.В.Ломоносова, Москва, Россия
erezn@inbox.ru

Пусть X — тихоновское пространство и $C_p(X)$ — пространство непрерывных функций на X в топологии поточечной сходимости. В [11] Эберлейн доказал теорему (часть теоремы Эберлейна–Шмуляна), которое эквивалентно утверждению: для компактных X любое относительно счетно компактное подмножество пространства $C_p(X)$ предкомпактно. Гротендик [12] показал, что этот результат остается верным для счетно компактного X. В дальнейшем эти результаты обобщались в разных направлениях [1, 2, 6, 9, 17–19, 26–28].

Пространства X и Y образуют *пару Гротендика* [20], если любой непрерывный образ пространства X в $C_p(Y)$ предкомпактен. Псевдокомпактное пространство X называется $\mu^{\#}_{pc}$*-псевдокомпактным*, если Y и X образуют пару Гротендика для любого псевдокомпактного пространства Y. Пространство X назовем *коровинским* (или пространством *Коровина*) [24], если (X, X) — пара Гротендика. Любое $\mu^{\#}_{pc}$-псевдокомпактное пространство является коровинским. В [20, 22–25] показана роль коровинских пространств в топологической алгебре. Нас в наибольшей степени интересуют $\mu^{\#}_{pc}$-псевдокомпактные пространства.

Теорема. *Пусть X — псевдокомпактное пространство, $Y \subset X = \overline{Y}$ и Y удовлетворяет какому-либо из перечисленных ниже условий:* (1) *является точечно почти q_D-пространством;* (2) *σ-β-неблагоприятно;* (3) *является сильно бузиадовским;* (4) *является $\widetilde{W}$-пространством;* (5) *имеет счетный π-характер;* (6) *является линделёфовым Σ-пространством;* (7) *является непрерывным образом k_σ-окрашенного пространства Z (например, Z — k-пространство), для которого выполняется одно из условий:*

(a) *Z ω-устойчиво и $e(Z^n) \leq \omega$ для любого $n \in \omega$;*

(b) (MA + ¬CH) *$e(Z^n) \leq \omega$ для любого $n \in \omega$;*

(c) (PFA) $e(Z) \leq \omega$.

Тогда X является $\mu^{\#}_{pc}$-псевдокомпактным пространством — любое псевдокомпактное подмножество $C_p(X)$ является компактом Эберлейна.

Результаты доклада изложены в препринте [29].

Список литературы

[1] M. Al'perin and A. V. Osipov. "Generalization of the Grothendieck's theorem". *Topology and its Applications.* **338** (2023), 108648.

[2] A. Arhangel'skii. "On a theorem of Grothendieck in C_p-theory". *Topology and its Applications.* **80**:1 (1997), 21–41. Memory of P.S. Alexandroff.

[3] A. Arhangel'skii. "Embeddings in C_p-spaces". *Topology and its Applications.* **85(1-3)** (1998), 9–33.

[4] A. V. Arhangel'skii. "Functional tightness, Q-spaces and τ-embeddings". *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae.* **24**:1 (1983), 105–120.

[5] A. V. Arhangelskii and M. M. Choban. "Completeness type properties of semitopological groups, and the theorems of Montgomery and Ellis". *Topology Proc.* **37** (2011), 33–60.

[6] M. Asanov and N. Velichko. "Компактные множества в $C_p(X)$". *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae.* **22**:2 (1981), 255–266.

[7] A. Bareche and A. Bouziad. "Some results on separate and joint continuity". *Topology and its Applications.* **157**:2 (2010), 327–335.

[8] A. Bouziad. "The Ellis theorem and continuity in groups". *Topology and its Applications.* **50**:1 (1993), 73–80.

[9] M. M. Choban, P. S. Kenderov, and W. B. Moors. "Eberlein theorem and norm continuity of pointwise continuous mappings into function spaces". *Topology and its Applications.* **169** (2014), 108–119. Special Issue in Honour of Mitrofan Choban and Stoyan Nedev.

[10] J. P. R. Christensen. "Joint continuity of separately continuous functions". *Proceedings of the American Mathematical Society.* **82**:3 (1981), 455–461.

[11] W. F. Eberlein. "Weak compactness in banach spaces: I". *Proceedings of the National Academy of Sciences.* **33**:3 (1947), 51–53.

[12] A. Grothendieck. "Criteres de compacite dans les espaces fonctionnels generaux". *American Journal of Mathematics.* **74**:1 (1952), 168–186.

[13] R. Haydon. "Compactness in $C_s(T)$ and Applications". *Publications du Département de mathématiques (Lyon).* **9**:1 (1972), 105–113.

[14] W. B. Moors. "Any semitopological group that is homeomorphic to a product of Čech-complete spaces is a topological group". *Set-Valued and Variational Analysis.* **21**:4 (2013), 627–633.

[15] W. B. Moors. "Semitopological groups, Bouziad spaces and topological groups". *Topology and its Applications.* **160**:15 (2013), 2038–2048.

[16] O. Okunev and E. Reznichenko. "A note on surlindelöf spaces". *Topol. Proc.* **31**:2 (2007), 667–675.

[17] D. Preiss and P. Simon. "A weakly pseudocompact subspace of banach space is weakly compact". *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae.* **015**:4 (1974), 603–609.

[18] J. Pryce. "A device of R.J. Whitley's applied to pointwise compactness in spaces of continuous functions". *Proceedings of the London Mathematical Society.* **3**:3 (1971), 532–546.

[19] V. Pták. "On theorem of W.F. Eberlein". *Studia Mathematica.* **14**:2 (1954), 272–275.

[20] E. Reznichenko. "Extension of functions defined on products of pseudocompact spaces and continuity of the inverse in pseudocompact groups". *Topology and its Applications.* **59**:3 (1994), 233–244.

[21] E. Reznichenko. "Homogeneous subspaces of products of extremally disconnected spaces". *Topology and its Applications.* **284** (2020), 107403.

[22] E. Reznichenko. "Extension of mappings from the product of pseudocompact spaces". *Topology and its Applications.* **322** (2022),108329.

[23] E. Reznichenko. "Functions on products of pseudocompact spaces". *Topology and its Applications.* **307** (2022),107935.

[24] E. Reznichenko and M. Tkachenko. "All countable subsets of pseudocompact quasitopological Korovin groups are closed, discrete and C^*-embedded". *Topology and its Applications.* **341** (2024), 108728.

[25] E. Reznichenko and V. Uspenskij. "Pseudocompact Mal'tsev spaces". *Topology and its Applications.* **86**:1 (1998), 83–104. Topological Groups.

[26] А.В. Архангельский. "О некоторых топологических пространствах, встречающихся в функциональном анализе". *УМН.* **31**:5 (1976), 17–32.

[27] А.В. Архангельский. "Пространства функций в топологии поточечной сходимости и компакты". *УМН.* **39**:5(239) (1984), 11–50.

[28] А.В. Архангельский. *Топологические пространства функций.* МГУ, 1989.

[29] Е.А. Резниченко. "Теорема Гротендика о предкомпактности подмножеств пространств функций над псевдокомпактными пространствами". *arXiv preprint*, arXiv:2401.11292, DOI:https://doi.org/10.48550/arXiv.2401.11292 2024.

Принципы выбора в равномерных группах

Сактанов У.А., Канетов Б.Э.
Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан
Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызстан
uca73@mail.ru, bekbolot_kanetov@mail.ru

В настоящей работе вводятся и исследуются равномерно M -ограниченные, равномерно H -ограниченные, равномерно R -ограниченные равномерные группы, а также игры в равномерных группах.

Пусть $(G, \cdot, U)$ – равномерная группа.

Определение 1. Равномерная группа $(G, \cdot, U)$ называется равномерно M -ограниченной (или равномерно Менгера равномерной группой), если равномерное пространство (G, U) является равномерно Менгера пространством.

Определение 2. Равномерная группа $(G, \cdot, U)$ называется равномерно H -ограниченной (или равномерно Гуревича равномерной группой), если равномерное пространство (G, U) является равномерно Гуревича пространством.

Определение 3. Равномерная группа $(G, \cdot, U)$ называется равномерно R -ограниченной (или равномерно Ротбергера равномерной группой), если равномерное пространство (G, U) является равномерно Ротбергера пространством.

Заметим, что если $(G, \cdot, U)$ - M -ограниченная (соответственно H -ограниченная, R -ограниченная) топологическая группа, то равномерная группа $(G, \cdot, U_t)$ является равномерно M -ограниченной (соответственно, равномерно H -ограниченной, равномерно R -ограниченной) равномерной группой, где U_t – двусторонняя равномерность топологической группы $(G, \cdot, \tau)$.

Теорема 1. Пусть $(G, \cdot, \tau)$ – топологическая группа. Если $(G, \cdot, \tau)$ - M -ограниченная (соответственно, H -ограниченная, R -ограниченная) группа, то равномерная группа $(G, \cdot, U_D)$ с универсальной групповой равномерностью U_D является равномерно M -ограниченной (соответственно, равномерно H -ограниченной, равномерно R -ограниченной), обратно, если $(G, \cdot, U_D)$ равномерно M -ограниченная (соответственно, равномерно H -ограниченная, равномерно R –ограниченная) равномерная группа, то топологическая группа $(G, \cdot, \tau_{U_D})$ является M -ограниченной (соответственно, H -ограниченной, R -ограниченной).

Теорема 2. Всякая подгруппа с индуцированной равномерностью равномерно M -ограниченной (соответственно, равномерно H -ограниченной, равномерно R -ограниченной) равномерной группы является равномерно M -ограниченной (соответственно, равномерно H -ограниченной, равномерно R -ограниченной) группой.

Теорема 3. Пополнение $(\widetilde{G}, \cdot, \widetilde{U})$ равномерно M -ограниченной (соответственно, равномерно H -ограниченной, равномерно R -ограниченной) равномерной группы $(G, \cdot, U)$ является равномерно M -ограниченной (соответственно, равномерно H -ограниченной, равномерно R -ограниченной) равномерной группой.

Теорема 4. При предкомпактных равномерно непрерывных гомоморфизмах равномерная M -ограниченность (соответственно, равномерная H -ограниченность) сохраняется как в сторону образа, так и в сторону прообраза.

Теорема 5. Если H замкнутая нормальная подгруппа равномерной группы G и как H, так и фактор-группа G/H равномерно M -ограничены, то и равномерная группа G, равномерно M -ограничена.

Теорема 6. Произведение предкомпактной и равномерно M -ограниченной группы является равномерно M -ограниченной равномерной группой, также произведение двух равномерно H -ограниченных равномерных групп является равномерно H -ограниченной равномерной группой.

Список литературы

[1] А.А. Борубаев. "Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения". Фрунзе: Илим, 1990.

[2] Б.Э. Канетов. "Некоторые классы равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений". Бишкек: КНУ им. Ж. Баласагына, 2013.

[3] L.D. Kocinac. "Selection principles in uniform spaces". *Note Mat.* **22**:2, 127–139.

Устойчивость по Хайерсу-Уламу дифференциальных уравнений с разрывными траекториями

Сесекин А.Н.
Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия
Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия
sesekin@list.ru

Рассматриваются достаточные условия устойчивости по Хайерсу-Уламу-Рассиясу обобщенных решений нелинейных систем дифференциальных с обобщенным воздействием в правой части. Для обыкновенных дифференциальных уравнений с абсолютно непрерывными траекториями эти вопросы рассматривались, например, в [1]. Отличительной особенностью настоящей работы является то, что правая часть дифференциального уравнения содержит обобщенные воздействия — обобщенные производные функций ограниченной вариации. Под решениями понимаются поточечные пределы последовательностей абсолютно непрерывных решений, получающиеся в результате аппроксимаций обобщенных воздействий в правой части уравнения суммируемыми функциями [2]. От работы [3] полученные авторами результаты отличаются тем, что в [3] используется формализация решений, предложенная в [4], а здесь используется упомянутая выше формализация решений, описанная в [2].

Для дифференциальных уравнений понятие устойчивости по Хайерсу-Уламу определяется следующим образом (см., например, [1])

Определение 1.

Уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x) \tag{1}$$

устойчиво по Хайерсу-Уламу, если существует число $c_f > 0$ такое, что для любого ε и любого решения $y \in C^1[a, b]$ неравенства

$$|y' - f(t, y)| \leq \varepsilon \quad t \in [t_0, \vartheta]$$

существует решение $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее неравенству

$$|y(t) - x(t)| \leq c_f \varepsilon \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

Очевидно, что такое определение не применимо в уравнениям с обобщенным воздействием в связи с неограниченностью правой части уравнения.

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(t, x) + B(t, x)\dot{v}(t). \tag{2}$$

Здесь $x(t)$, $v(t)$ — соответственно n и m-мерные вектор-функции времени, $f(t, x)$ — n-мерная вектор-функция и $B(t, x)$ — $n \times m$-матрица-функция. Если функция $v(t)$ является абсолютно непрерывной, то при известных предположениях на $f(t,x)$ и $B(t,x)$ существует единственное решение уравнения (2) на отрезке $[t_0,\vartheta]$, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0)=x^0$.

Если же $v(t)$ будет функцией ограниченной вариации, то производную в уравнении (2) следует понимать в обобщенном смысле [2], а тогда в правой части возникает некорректная операция умножения разрывной функции на обобщенную. Один из возможных способов решения этой основан на определении решения на замыкании множества гладких решений в пространстве функций ограниченной вариации [2].

Согласно [2], аппроксимируемым решением задачи Коши (2), соответствующим функции ограниченной вариации $v(t)$, будем называть функцию ограниченной вариации $x(t)$, являющуюся поточечным пределом последовательности $x_k(t)$, порожденной последовательностью абсолютно непрерывных функций $v_k(t)$, поточечно сходящейся к $v(t)$, если $x(t)$ не зависит от выбора последовательности $v_k(t)$.

Тогда при определенных условиях (см. [2]) всякой вектор-функции $v(t)$ существует аппроксимируемое решение $x(t)$ задачи Коши (2), которое удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t)=x^0+\int\limits_{t_0}^{t} f(\xi,x(\xi))\,d\xi+\int\limits_{t_0}^{t} B(\xi,x(\xi))\,dv^c(\xi)+$$

$$+\sum_{t_i\le t,\,t_i\in\Omega_-} S(t_i,x(t_i-0),\Delta v(t_i-0))+\sum_{t_i<t,\,t_i\in\Omega_+} S(t_i,x(t_i),\Delta v(t_i+0)), \tag{3}$$

где

$$S(t,x,\Delta v)=z(1)-x,$$
$$\dot z(\xi)=B(t,z(\xi))\Delta v(t),\quad z(0)=x, \tag{4}$$

$\Omega_-(\Omega_+)$ — множество точек левого (правого) разрывов вектор-функции $v(t)$, $v^c(t)$ — непрерывная составляющая функции ограниченной вариации $v(t)$,

$$\Delta v(t-0)=v(t)-v(t-0),\ \ \Delta v(t+0)=v(t+0)-v(t).$$

Определение 2. Будем говорить, что дифференциальное уравнение (2) устойчиво по Хайерсу-Уламу на $[t_0,\vartheta]$, если для любой вектор-функции $y\in BV[t_0,\vartheta]$, удовлетворяющей неравенству

$$\Bigg|y(t)-x_0-\int\limits_{t_0}^{t} f(\xi,y(\xi))\,d\xi-\int\limits_{t_0}^{t} B(\xi,y(\xi))\,dv^c(\xi)-$$

$$-\sum_{t_i\le t,\,t_i\in\Omega_-} S(t_i,y(t_i-0),\Delta v(t_i-0))-\sum_{t_i<t,\,t_i\in\Omega_+} S(t_i,y(t_i),\Delta v(t_i+0))\Bigg|\le\varepsilon, \tag{5}$$

для любого $\epsilon > 0$ и любого решения неравенства (5) существует положительное вещественное число $c_{f,\varphi}$ и решение уравнения (2) $x(t)$, удовлетворяющие неравенству

$$|y(t) - x(t)| < c_f \varepsilon$$

для любого $t \in [t_0, \vartheta]$.

Теорема. *Пусть существует аппроксимируемое решение уравнения (2). Тогда дифференциальное уравнение (2)) устойчиво по Хайерсу-Уламу.*

Для дифференциальных уравнений первого о второго порядка с обобщенным воздействием в правой части, рассматривались в [5]

Список литературы

[1] I. A. Rus. "Ulam stability of ordinary differential equations". *Studia Uinv. “BABES–BOLYAI”, Mathematica.* **LIV.**:4 (2009), 125–133.

[2] S. T. Zavalishchin, A. N. Sesekin. "Dynamic Impulse Systems: Theory and Applications". Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.

[3] J. R. Wang, M. Feckan, Y. Zhou. "Ulam’s type stability of impulsive ordinary differential equations". *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* **395**:1 (2012), 258–264

[4] A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk. "Impulsive differential equations". River Edge, NJ: World Scientific Publishing Co., Inc., 1995.

[5] V. Pavlenko, A. Sesekin. "Ulam-Hyers Stability of First and Second Order Differential Equations with Discontinuous Trajectories". В V. N. Tkhai (Ред.), Proceedings of 2022 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy’s Conference). Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.

Максимальность и разложимость топологических групп

Сипачева О.В.
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
ovsipa@gmail.com

Понятия максимальности и (не)разложимости топологических пространств ввел Э. Хьюитт в 1943 г. Они привлекали внимание многих ведущих топологов, в том числе и Евгения Георгиевича [1]; его работы последних лет, посвященные открытым ультрафильтрам [2], тоже имеют самое непосредственное отношение к неразложимости.

Топологическое пространство называется *максимальным*, если оно плотно в себе (т.е. не содержит изолированных точек) и его топологию нельзя усилить без потери этого свойства. Хорошо известно, что все максимальные пространства *неразложимы* (т.е. не раскладываются в объединение двух непересекающихся всюду плотных множеств), *экстремально несвязны* (замыкание любого открытого множества открыто) и даже *совершенно несвязны* (любые непересекающиеся множества отделимы, или, что равносильно, все плотные в себе подпространства открыты); кроме того, все нигде не плотные множества в таких пространствах замкнуты (и дискретны).

Поскольку всякая недискретная топологическая группа плотна в себе, естественно возникает проблема изучения топологических групп с перечисленными выше свойствами. Однако несмотря на то, что топология любого плотного в себе пространства усиливается до максимальной (по лемме Цорна), максимальные и даже неразложимые топологические группы существуют не всегда. И.В. Протасов доказал, что из существования неразложимой отделимой топологической группы вытекает существование P-ультрафильтра [3] (при этом несуществование P-ультрафильтров совместимо с системой аксиом ZFC теории множеств); много сведений о максимальных и неразложимых топологических группах можно почерпнуть в книге [4].

Когда речь идет о топологических группах, не менее (а возможно, и более) естественно рассматривать максимальные *групповые* топологии, которые существуют всегда. В группах с максимальными групповыми топологиями обязаны быть открытыми не все плотные в себе подмножества, а лишь те, которые являются подгруппами (или удовлетворяют некоторым другим естественным условиям). Доклад будет посвящен группам с максимальными групповыми топологиями, а также связи свойств топологических групп со свойствами фильтров окрестностей единицы в этих группах. Кроме того, будут представлены и новые результаты о максимальных и неразложимых топологических группах (в классическом смысле).

Список литературы

[1] Е. Г. Пыткеев. “О максимально разложимых пространствах”. *Тр. МИАН СССР.* **154** (1983), 209–213.

[2] Е. Г. Пыткеев, А. Г. Ченцов. “Открытые ультрафильтры и отделимость с использованием операции замыкания”. *Тр. ИММ УрО РАН.* **22**: 3 (2016), 212–225.

[3] I. V. Protasov. “Irresolvable topologies on groups”. *Ukr. Math. J.* **50**: 12 (1998), 1879–1887.

[4] Y. Zelenyuk. "Ultrafilters and Topologies on Groups". De Gruyter, 2011.

Каждое T_1 связное пространство с первой аксиомой счетности является непрерывным открытым образом связного метризуемого пространства

Смолин В.Р.
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, РФ
Уральский Федеральный Университет, Екатеринбург, РФ
SVRusl@yandex.ru

Мы доказываем следующую теорему, которая дает положительный ответ на вопрос поставленный в [1]:

Теорема. *Каждое T_1 связное пространство с первой аксиомой счетности является непрерывным открытым образом связного метризуемого пространства.*

Список литературы

[1] V. Tkachuk. "When do connected spaces have nice connected preimages?". *Proceedings of the American Mathematical Society.* **126**:11 (1998), 3437–3446.

Решетки расширений циклически упорядоченных множеств и компактификаций обобщенных циклически упорядоченных пространств

Сорин Г.Б.
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, каф. Общей топологии и геометриию, Москва, Российская Федерация
georgsorin@yandex.ru

В [1] доказано, что каждое GO пространство вкладывается топологически с сохранением линейного порядка в некоторое наименьшее LOTS. В [2, 3] описана полная решетка всех линейно упорядоченных компактификаций произвольного LOTS. В данной работе показано, что семейство расширений циклически упорядоченного множества является полной решеткой. Аналогичный результат верен и для линейно упорядоченных множеств, откуда следуют приведенные выше утверждения.

Циклически упорядоченным (*ц.у.*) *множеством* называется пара (X, R), где R — трехместное отношение на множестве X, удовлетворяющее следующим условиям (вместо $(a, b, c) \in R$ для краткости будем писать $[a, b, c]$):
1) цикличность: $[a, b, c] \implies [b, c, a]$;
2) асимметричность: $[a, b, c] \implies (b, a, c) \notin R$;
3) транзитивность: $[a, b, c] \wedge [a, c, d] \implies [a, b, d]$;
4) полнота порядка: для любых попарно различных $a, b, c \in X$ либо $[a, b, c]$, либо $[a, c, b]$.

Базу топологии σ_R циклического порядка образует семейство интервалов $(a, b)_R = \{x \in X | [a, x, b]\}$, где $a, b \in X$. Топология σ_R на ц.у. множестве (X, R) является наименьшим элементом в решетке T топологий, имеющих базу из выпуклых множеств. Эти топологии будем называть GCO (generalized cyclically ordered) топологиями.

Будем говорить, что отображение $f : X \to Y$ между ц.у. множествами *сохраняет циклический порядок*, если $\forall a, b, c \in X$ $[f(a), f(b), f(c)]_{R_Y} \implies [a, b, c]_{R_X}$.

Пара $((Y, R_Y), i)$ называется *расширением* ц.у. множества (X, R_X), если отображение $i : X \to Y$ инъективно, сохраняет циклический порядок и $i(X)$ плотно в Y (т.е. каждый непустой интервал в Y пересекается с X).

Щелью [5] на ц.у. множестве (X, R) называется такое отношение $<$ линейного порядка на множестве X, что
1) в множестве $(X, <)$ нет ни наибольшего, ни наименьшего элементов;
2) $\forall a, b, c \in X$ $a < b < c \implies [a, b, c]$.

Множество всех щелей на (X, R) обозначим через $\mathcal{U}$. Через 3 обозначим решетку (линейно упорядоченное множество) из трех элементов. Имеет место

Теорема. *Семейство $\mathcal{C}(X)$ всех расширений ц.у. множества (X, R) является полной решеткой, изоморфной произведению решетки GCO топологий T и решетки $3^{\mathcal{U}}$.*

Упорядоченную тройку (X, R, σ_R) будем называть COTS (cyclically ordered topological space).

Из теоремы имеем

Следствие 1. *Каждое GCO пространство вкладывается топологически с сохранением циклического порядка в некоторое наименьшее COTS.*

В [4] доказано, что (X, σ_R) компактно $\iff$ (X, R) не имеет щелей.

Таким образом, имеет место

Следствие 2. *Семейство $\widehat{\mathcal{C}}(X, \sigma)$ циклически упорядоченных компактификаций GCO пространства (X, R, σ) является полной подрешеткой в $\mathcal{C}(X)$, изоморфной $2^{\mathcal{U}}$.*

Список литературы

[1] T. Miwa, N. Kemoto. "Linearly ordered extensions of GO-spaces". *Topol. Appl.* **54** (1993) 133–140.

[2] R. Kaufman. Ordered sets and compact spaces. *Colloq. Math.* **17** (1967), 35–39.

[3] В. Федорчук. "Некоторые вопросы теории упорядоченных пространств". *Сибирский математический журнал.* **10**:1 (1969), 172–187.

[4] M. Megrelishvili. "Orderable groups and semigroup compactifications". *Monatsh Math.* **200** (2023), 903–932.

[5] V. Novák. "Cuts in cyclically ordered sets". *Czechoslovak Mathematical Journal.* **34**:2 (1984), 322–333.

О свойствах $\pi\mathfrak{R}$-пространств

Филатова М.А., Соловьёв А.А.
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Уральский Федеральный Университет, Екатеринбург, Россия
Уральский Федеральный Университет, Екатеринбург, Россия
MA.Filatova@urfu.ru, Andrey135296@yandex.ru

Е.Г. Пыткеев определил в 1983 году понятие $\pi\mathfrak{R}$-пространства и доказал максимальную разложимость $\pi\mathfrak{R}$-пространств [1].

Топологическое пространство X называется $\pi\mathfrak{R}$-пространством, если для всякого незамкнутого $A \subset X$ найдётся точка $x \in \overline{A} \setminus A$ и π-сеть $\mathfrak{R}_\mu$ в точке x, синхронная с $\{A\}$ [1].

Класс $\pi\mathfrak{R}$-пространств содержит, например, секвенциальные пространства, радиальные и псевдорадиальные пространства (т.е. непрерывные факторные образы упорядоченных пространств [2]), k-пространства (и, в частности, компакты). В 2000 году В. И. Малыхин и G. Tironi определили пространства Пыткеева (подробные обсуждения см. в [3]). Пространства Пыткеева являются частным случаем $\pi\mathfrak{R}$-пространств.

Мы исследуем топологические свойства $\pi\mathfrak{R}$-пространств: сохранение при переходе к подпространству, поведение при топологических операциях; а также сохранение свойств отображениями (определения можно найти в [4]).

Теорема 1. *Свойство быть $\pi\mathfrak{R}$-пространством инвариантно относительно взятия замкнутого подпространства и прямой суммы; оно не сохраняется при переходе к подпространству, конечными произведениями; предел обратной последовательности $\pi\mathfrak{R}$-пространств может не быть $\pi\mathfrak{R}$-пространством.*

Теорема 2. *Свойство быть $\pi\mathfrak{R}$-пространством инвариантно относительно факторных отображений.*

Список литературы

[1] Е. Г. Пыткеев, "О максимально разложимых пространствах". *Труды Матем. Инст. Стеклова,* **153**, (1983), 225–230.

[2] А. В. Архангельский. "О некоторых свойствах радиальных пространств". *Матем. заметки,* **27**: 1 (1980), 95–104.

[3] V. I. Malykhin, G. Tironi. "Weakly Frechet–Urysohn and Pytkeev spaces". *Topology and its Applications* **104** (2000), 181–190.

[4] R. Engelking. General Topology. PWN-Polish Scientific Publishers, 1977.

О дополняемости пространств $C_p(X)$

Хмылева Т.Е.
Томский государственный университет, Томск, Россия
tex2105@.yandex.ru

В данной работе рассматриваются пространства $C_p(X)$ для счетных разреженных метризуемых пространств X.

Для ординала $\alpha < \omega_1$ через $X^{(\alpha)}$ обозначаем производную порядка α, определяемую по трансфинитной индукции: $X^{'}$ – множество неизолированных точек в $X, X^{(\alpha)} = \left(X^{(\alpha-1)}\right)^{'}$ для непредельного ординала α и $X^{(\alpha)} = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} X^{(\beta)}$ для предельного ординала α. Аналогично определяется $X^{\{\alpha\}}$ (см. [1]): $X^{\{1\}}$ – множество точек $x \in X$, не имеющих компактной окрестности в X, $X^{\{\alpha\}} = \left(X^{\{\alpha-1\}}\right)^{\{1\}}$, если α – непредельный ординал и $X^{\{\alpha\}} = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} X^{\{\beta\}}$, если α – предельный ординал.

Если $X = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$, то очевидно $C_p(X) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} C_p(X_n)$, а

$$\Big(\prod_{n=1}^{\infty} C_p(X_n)\Big)_{c_0} = \Big\{x \in \prod_{n=1}^{\infty} C_p(X_n) : \{n : \|x_n\| > \epsilon\} \ - \ \textit{конечно для } \forall\epsilon > 0\Big\},$$

где $\|x_n\| = \sup\limits_{t\in X_n} |x_n(t)|$.

Теорема 1. *Пусть X, Y – метрические пространства, $X = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $K \subset Y$ – компакт и $T : C_p(X) \to C_p(Y)$ – непрерывное линейное отображение. Тогда существуют открытое множество $U \supset K$ и $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любой функции $x \in C_p(X)$ выполнено условие*

$$x\Big|_{\bigsqcup\limits_{n=1}^{n_0} X_n} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad Tx\Big|_U \equiv 0,$$

то есть $T\Big(\prod\limits_{n=n_0+1}^{\infty} C_p(X_n)\Big) \subset C_p(Y \setminus U)$.

Используя теорему Мазура-Орлича (см. [2]), получаем

Следствие 1. *Пусть X, Y метрические пространства, $X = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $Y^{(1)}$ – компакт, а $X_n^{(1)} \neq \emptyset$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $C_p(X)$ не линейно гомеоморфно никакому замкнутому подпространству в $C_p(Y)$.*

Следствие 2. *Пусть X, Y – метрические пространства, $X = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n, Y = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ и $T : \prod\limits_{n=1}^{\infty} C_p(X_n) \to \Big(\prod\limits_{n=1}^{\infty} C_p(Y_n)\Big)_{c_0}$ линейное непрерывное отображение. Тогда существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $T\Big(\prod\limits_{n=n_0+1}^{\infty} C_p(X_n)\Big) \subset \prod\limits_{n=1}^{n_0} C_p(Y_n)$.*

Теорема 2. *Пусть* X, Y *– метрические пространства,* $X = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n, Y = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ *и* $T : \left(\prod\limits_{n=1}^{\infty} C_p(X_n)\right)_{c_0} \to \prod\limits_{n=1}^{\infty} C_p(Y_n)$ *– линейный гомеоморфизм на дополняемое подпространство в* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} C_p(Y_n)$*. Тогда существует* $n_0 \in \mathbb{N}$ *такой, что подпространство* $\left(\prod\limits_{n=n_0+1}^{\infty} C_p(X_n)\right)_{c_0}$ *дополняемо вкладывается в пространство* $\prod\limits_{n=1}^{n_0} C_p(Y_n)$ *.*

Следствие 3. *Пространство* $\left(\prod\limits_{\aleph_0}\mathbb{R} \times \prod\limits_{\aleph_0}\mathbb{R} \times \cdots\right)_{c_0}$ *дополняемо не вкладывается в пространство* $\prod\limits_{\aleph_0} c_0$ *и пространство* $\prod\limits_{\aleph_0} c_0$ *дополняемо не вкладывается в пространство* $\left(\prod\limits_{\aleph_0}\mathbb{R} \times \prod\limits_{\aleph_0}\mathbb{R} \times \cdots\right)_{c_0}$ *.*

Теорема 3. *Пусть* X*,* Y *– метрические пространства,* $K \subset X$ *– компакт и* $T : C_p(X) \to C_p(Y)$ *является линейным гомеоморфизмом на дополняемое подпространство в* $C_p(Y)$*. Тогда существует компакт* $Y_0 \subset Y$*, такой что* $C_p(K)$ *дополняемо вкладывается в пространство* $C_p(Y_0)$ *.*

Из теоремы 3, используя классификацию непрерывных функций на счетных компактах (см. [3]), получаем

Следствие 4. *Если* $Y^{(\alpha)} = \emptyset$ *для некоторого ординала* $\alpha < \omega_1$*, а* $X^{(\alpha\cdot\omega)} \neq \emptyset$*, то пространство* $C_p(X)$ *дополняемо не вкладывается в пространство* $C_p(Y)$ *.*

Рассмотрим теперь счетные разреженные метрические пространства X и Y. Нетрудно показать что, если $X^{(\alpha)} = \emptyset$ для некоторого $\alpha < \omega_1$, то $C_p(X)$ гомеоморфно пространству $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\prod\limits_{k=1}^{\infty} C_p(X_k^n)\right)_{c_0}$, причем для любого $n \in \mathbb{N}$ существует ординал $\beta_n < \alpha$ такой, что $(X_k^n)^{\{\beta\}} = \emptyset$ для любого $k \in \mathbb{N}$, если α – предельный ординал и $(X_k^n)^{\{\alpha-1\}} = \emptyset$, если α – непредельный ординал.

Если же $Y^{\{\alpha\}} \neq \emptyset$, то в пространстве $C_p(Y)$ есть дополняемое подпространство, гомеоморфное $\left(\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\prod\limits_{k=1}^{\infty} C_p(X_k^n)\right)\right)_{c_0}$, причем, если α – предельный ординал, то существует последовательность β_n такая, что $\lim\limits_n \beta_n = \alpha$ и $(X_k^n)^{\{\beta_n\}} \neq \emptyset$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Если же α – непредельный ординал, то $(Y_k^n)^{\{\alpha-1\}} \neq \emptyset$ для всех $n, k \in \mathbb{N}$.

Применяя Теоремы 1 и 2, методом трансфинитной индукции получаем

Теорема 4. *Пусть* X*,*Y *– счетные разреженные метризуемые пространства. Если* $X^{\{\alpha\}} = \emptyset$*, а* $Y^{\{\alpha\}} \neq \emptyset$*, то пространство* $C_p(Y)$ *дополняемо не вкладывается в пространство* $C_p(X)$ *.*

Список литературы

[1] J. Baars, J.de Groot. "On the l-equivalence of metric spaces". *Fund. Math.* **137** (1991), 25–43.

[2] S. Mazur, W. Orlics, "On linear methods of summability". *Studia Math.* **14** (1954), 129–160.

[3] S. Bessaga, A. Pelczynski. "Spaces of continuos functions". *Studia Math.,* **19** (1960), 53–62.

Some homotopy properties of the space of thin maximal linked systems[1]

Kholmatov F.M., Mukhamadiev F.G.
National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Faculty of Mathematics, Department of geometry and topology, Tashkent, Uzbekistan
xolmatovfazliddin0407@gmail.com, farhod8717@mail.ru

A system $\xi = \{F_\alpha : \alpha \in A\}$ of closed subsets of a space X is called *linked* if any two elements from ξ intersect [1].

Any linked system can be upgraded to a maximum linked system (MLS). But such upgrade, as a rule, is not one valued.

A linked system of space is MLS, if and only if it possesses the following completeness property [1]:

If a closed set $A \subset X$ intersects with every element of ξ, then $A \in \xi$.
We denote λX as the set of all MLS of the space X.

For the close set $A \in \lambda X$ we consider $A^+ = \{\xi \in \lambda X : A \in \xi\}$.

For the open set $U \subset X$ we consider $O(U) = \{\xi \in \lambda X : \text{there exists } F \in \xi \text{ such that } F \subset U\}$.

A maximal linked system μ of a space X is called a *thin maximal linked system* if μ contains at least one finite element.

We denote by $\lambda^* X$ the set of all thin maximal linked systems of the space X [2].

Theorem 1. If mappings $f, g : X \to Y$ are homotopic, then the mappings $\lambda^* f, \lambda^* g : \lambda^* X \to \lambda^* Y$ are also homotopic.

Proposition 1. Let for a subset $A \subseteq X$ the relation $\lambda^* A \subseteq \lambda^* X$ is correct. If a set A is a retract of a topological space X, then the set $\lambda^* A$ is a retract of the space $\lambda^* X$.

Theorem 2. The functor of thin complete linked systems λ^* is a covariant homotopy functor.

Proposition 2. If a topological space X is contractible, then the space $\lambda^* X$ is also contractible.

Corollary. If spaces X and Y are homotopically equivalent, then the spaces $\lambda^* X$ and $\lambda^* Y$ are also homotopically equivalent.

Keywords: Functor, maximal linked system, retract, contractible, homotopy.

AMS Subject Classification. Primary: 18F60; Secondary: 18A22, 54A25, 55P99.

[1]This work was partially supported by Erasmus + "Key Action 1 - Mobility for learners and staff - Higher Education Student and Staff Mobility"

Список литературы

[1] V. V. Fedorchuk, V. V. Filippov. "General Topology. Basic Constructions". Fizmatlit, Moscow. 2006, 336 p.

[2] T. K. Yuldashev, F. G. Mukhamadiev. "Caliber of space of subtle complete coupled systems". *Lobachevskii J. Math.* **42**:12 (2021), 3043–3047.

О множествах Лузина и Серпинского

Холщевникова Н.Н.
ГОУ ВО МГТУ "Станкин", Москва, Россия
Kholshchevnikova@gmail.com

I. В 1914г. Н.Н.Лузин доказал следующую теорему (см. [1]).

Теорема Лузина. Если мощность континуума есть алеф-один, то существует в интервале $(0,1)$ множество E мощности континуум такое, что всякое совершенное множество, нигде не плотное в (0,1), содержит не более чем счетное множество точек E.

Множества, обладающие таким свойством, называются теперь лузинскими множествами.

В 1924г. В.К. Серпинским [2] доказана

Теорема Серпинского. Если мощность континуума есть алеф-один, то существует в интервале $(0,1)$ множество E мощности континуум такое, что всякое множество меры 0, содержит не более чем счетное множество точек E.

Такие множества называются множествами Серпинского.

Предположение о мощности континуума, при котором доказаны эти теоремы, называется гипотезой континуума CH, оно было высказано Г.Кантором в 1878г., и состоит в том, что мощность континуума и есть первая несчетная мощность (алеф-один). В предположении CH были доказаны различные теоретико-множественные и теоретико-функциональные предположения Н.Лузиным, А.Зигмундом, В.Серпинским и другими математиками. Однако в то время взаимоотношение CH и ZFC было неясным.

В 1939г. К.Ф. Гедель доказал, что CH совместима с ZFC, а в 1963г. П.Дж. Коэн доказал невыводимость CH.

II. Множество, для которого свойство быть лузинским множеством является неопределенным.

В 1990г. вышла статья В.И. Малыхина "Топологические пространства, свойства которых не определены в ZFC" [3]. В частности, в этой работе спрашивалось, существует ли несчетное подмножество, построенное в ZFC, которое в какой-то модели (при каких-то дополнительных теоретико-множественных предположениях) было бы лузинским.

Основная конструкция. Выполним построение в ZFC, которое дает пример множества, для которого свойство быть лузинским множеством является неопределенным. Для этого рассмотрим конструкцию множеств на [0,1], аналогичную построению Лузина в CH, которая дает множества с рядом свойств, неопределенных в ZFC.

Напомним определения идеала множеств и его накрывающей базы.

Определение 4.1. Семейство $\mathcal{J}$ подмножеств прямой называют идеалом, если оно наследственное и аддитивное, т.е. если

1) из того, что $B \in \mathcal{J}$ и $A \subset B$ следует, что $A \in \mathcal{J}$

2) $A \in \mathcal{J}$ и $B \in \mathcal{J}$, то $A \cup B \in \mathcal{J}$.

Определение 4.2. Накрывающей базой идеала $\mathcal{J}$ называется такое его подсемейство $\mathcal{B} \subset \mathcal{J}$, что для всякого $A \in \mathcal{J}$ найдется $B \in \mathcal{B}$, такое что $A \subset B$.

Пусть $\mathcal{M}$ — идеал всех нигде не плотных подмножеств из [0,1), а $\mathcal{B}$ - какая-нибудь накрывающая база наименьшей мощности для этого идеала. Обозначим мощность $\mathcal{B}$ через nd. Известно, что $\omega_1 \leq nd \leq c$.

Вполне упорядочим множество $\mathcal{B}$ по наименьшему типу $\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha < nd\}$.

Выберем по индукции

$$x_\alpha \in [0,1) \setminus A_\alpha,$$

где

$$A_\alpha = (\cup\{B_\beta : \beta < \alpha\}) \cup \{x_\beta : \beta < \alpha\}$$

для $\alpha < \omega_1$.

Так как для $\alpha < \omega_1$ множество A_α имеет первую категорию, то в силу теоремы Бэра о категориях множество $[0,1) \setminus A_\alpha$ непусто и, следовательно, определение элементов x_α корректно.

Положим $X = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. В предположении CH множество X - лузинское, так как с каждым нигде не плотным множеством оно пересекается не более чем по счетному множеству. Действительно, если множество A нигде не плотно, то $A \subset B_\alpha \in \mathcal{B}$, причем $\alpha < \omega_1$, и $X \cap B_\alpha \subset \{x_\beta : \beta < \alpha\}$ - счетное подмножество X.

Аналогичное построение получается для множества, которое в CH будет множеством Серпинского. □

При различных дополнительных теоретико-множественных предположениях, построенные множества обладают разными свойствами. Так в предположении $MA + \neg CH$ ни множеств Лузина, ни множеств Серпинского не существует, так как в этом случае всякое множество мощности меньше континуума имеет меру 0 и первую категорию (Д. Мартин, Р. Соловей, С. Тенненбаум).

Известно, что теория

$$ZFC + (\mathrm{cof}(\mathcal{L}) = \omega_1) + (c = \omega_2)$$

состоятельна (см., например, [4,5]).

Здесь $\mathcal{L}$ — семейство всех множеств меры 0 на $[0,1]$,

$$\mathrm{cof}(\mathcal{L}) = \min\{|\mathcal{E}| : \mathcal{E} \subset \mathcal{L},\ \mathcal{E} \text{ — накрывающая база } \mathcal{L}\}.$$

Аналогично определяется $\mathrm{cof}(\mathcal{K})$, где $\mathcal{K}$ - семейство всех нигде не плотных подмножеств $[0,1]$.

В диаграмме (Cicho'n diagram) показано, что $\mathrm{cof}(\mathcal{K}) \leq \mathrm{cof}(\mathcal{L})$, поэтому в рассматриваемой выше теории, построенные множества с неопределенными свойствами в ZFC, оказываются множеством Серпинского и множеством Лузина, соответственно.

Список литературы

[1] N. Luzin. “Sur un probleme de M. Baire”. *Comptes Rendus* **15S** (1914), 1258–1261. // Н.Н. Лузин. Собрание сочениений. II том. С.863.

[2] W. Sierpinski. "Sur l’hypothese du continu". *Fund. Math.* **5** (1924), 177–187.

[3] В.И. Малыхин. "Топологические пространства, свойства которых не определены в ZFC". *Сиб. матем. журнал.* **31**:4 (1990), 105–110.

[4] A.W. Miller. "Special Subsets of the Real Line". (Chapter 5 in the Handbook of set-theoretical topology, 1984.)

[5] T.Bartoszynski, H.Judah. "Set Theory: on the structure of the real line". A.K. Peters, Wellesley, 1995.

Максимальные сцепленные системы и ультрафильтры широко понимаемых измеримых пространств

Ченцов А.Г.
ИММ УрО РАН им.Н.Н.Красовского, Екатеринбург, Россия
chentsov@imm.uran.ru

Рассматривается непустое множество E с оснащением в виде π-системы своих подмножеств (п/м) с «нулем» (пустое множество) и «единицей» (множество E). Исследуются два типа семейств п/м E – ультрафильтры (у/ф) и максимальные сцепленные системы (МСС), содержащиеся в исходной π-системе. На множествах у/ф и МСС данной π-системы вводятся две сравнимые топологии: волмэновского и стоуновского типов. В первом случае реализуется [1, раздел 4] суперкомпактное T_1-пространство, а во втором – нульмерное T_2-пространство. При этом битопологическое, в упомянутом смысле, пространство у/ф является [1, предложение 6.5] подпространством битопологического пространства с точками в виде МСС. Указаны [2] условия, при которых МСС исчерпываются у/ф, а также частные случаи исходной π-системы, для которых «волмэновская» и «стоуновская» топологии совпадают. Исследуются конструкции произведения экземпляров пространств у/ф и МСС в оснащении топологией стоуновского типа.

Список литературы

[1] А. Г. Ченцов. "Битопологнические пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем". *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* **24**:1, (2018), 257–272.

[2] А. Г. Ченцов. "О суперкомпактности пространства ультрафильтров с топологией волмэновского типа". *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета.* **54**, (2019), 74–101.

Некоторые конструкции решения экстремальных задач маршрутизации [1]

Ченцов А.Г.
ИММ УрО РАН им.Н.Н.Красовского, Екатеринбург, Россия
chentsov@imm.uran.ru

Исследуется задача последовательного обхода мегаполисов с условиями предшествования и функциями стоисмости, зависящими от списка заданий (возможные применения: атомная энергетика; задачи, связанные с листовой резкой на машинах с ЧПУ; задачи транспортного типа). Прототипом исследумых задач является известная труднорешаемая задача коммивояжера (TSP — в англоязычных публикациях). В качестве основного метода решения используется широко понимаемое динамическое программирование (ДП). Для задач ощутимой размерности предлагается [1, 2] процедура декомпозиции на основе раздельного применения ДП в частичных задачах умеренной размерности. Исследуются варианты постановки с аддитивным критерием [1] и задачи на узкие места (минимаксная постановка) [2]. Обсуждаются результаты вычислительного эксперимента.

Список литературы

[1] А. Г. Ченцов, П. А. Ченцов. "Двухэтапное динамическое программирование в задаче маршрутизации с элементами декомпозиции". *Автоматика и телемеханика.* **5** (2023), 133–164.

[2] А. Г. Ченцов. "Задача маршрутизации «на узкие места» с системой первоочередных заданий". *Изв. ИМИ УдГУ.* **61** (2023), 156–186.

[1]Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре

Порядки аппроксимации локальными экспоненциальными сплайнами

Шевалдин В.Т.
Институт математики и механики им.Н.Н.Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия
Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

Пусть $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n(D)$ — линейный дифференциальный оператор n-го порядка ($n \in \mathbb{N}$) с постоянными действительными коэффициентами, у которого характеристический многочлен имеет действительные корни $\beta_1, \beta_2, \ldots$ $\ldots, \beta_n$, которые в дальнейшем мы будем считать попарно различными. Он может быть записан в виде

$$\mathcal{L}_n(D) = \prod_{j=1}^{n} (D - \beta_j).$$

Этому оператору ставится в соответствие разностный оператор с шагом $h > 0$, определенный на пространстве последовательностей $y = \{y_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$ следующим образом:

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_n} y_m = \prod_{j=1}^{n} (T - e^{\beta_j h} E) y_m,$$

где оператор $Ty_m = y_{m+1}$ — оператор сдвига и E — тождественный оператор. Операторы $\mathcal{L}_n$ и $\Delta_h^{\mathcal{L}_n}$ имеют одно и то же ядро, которым являются всевозможные линейные комбинации функций $e^{\beta_1 x}, e^{\beta_2 x}, \ldots, e^{\beta_n x}$. Пусть φ_n — решение однородного уравнения $\mathcal{L}_n(D)f = 0$, удовлетворяющее условию $\varphi_n^{(j)}(0) = \delta_{j,n-1}$ ($j = 0, 1, \ldots, n-1$), где $\delta_{j,n-1}$ — символ Кронекера. Определим на всей числовой оси $\mathbb{R}$ базисный L-сплайн с равномерными узлами $0, h, 2h, \ldots, (n-1)h$ следующей формулой:

$$B(x) = \Delta_h^{\mathcal{L}_n}((x - nh)_+) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Здесь $u_+ = \max\{0, u\}$. Из определения B-сплайна следует, что его носитель $\operatorname{supp} B = [0; nh]$. Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и

$$y_{j+\alpha} = f((j+\alpha)h) \quad (j \in \mathbb{Z},\ 0 \le \alpha < 1).$$

Рассмотрим систему функционалов

$$I_j = c_1 y_{j+\alpha} + c_2 y_{j+\alpha+1} + \cdots + c_n y_{j+\alpha+n-1} \quad (j \in \mathbb{Z}),$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — произвольный набор действительных чисел, который мы определим из соображений точности будущей схемы построения локального сплайна на функциях из ядра оператора $\mathcal{L}_n$. Локальный сплайн определим формулой

$$S(x) = S(f, x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} I_j B(x - jh) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Мы стремимся к такому выбору чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, чтобы выполнялось приближенное равенство $S(f, x) \approx f(x)$. Эти числа будем определять так, чтобы имели место равенства

$$S(e^{\beta_j x}, x) = e^{\beta_j x} \quad (j = 1, 2, \ldots, n;\ x \in \mathbb{R}). \tag{1}$$

Оказывается, что условиями (1) числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ определяются однозначно, и имеет место следующий результат.

Теорема [1]. *Система линейных алгебраических уравнений относительно чисел* $c_1, c_2, \ldots, c_n$

$$\sum_{s=1}^{n} c_s e^{\beta_j (s-1) h} = Y_j = e^{\beta_j (n-1-\alpha) h} \prod_{k=1, k \neq j}^{n} \frac{\beta_j - \beta_s}{e^{\beta_j h} - e^{\beta_s h}} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

разрешима, и ее решение $\{c_j\}_{j=1}^n$ *обращает в тождества равенства* (1).

Систему (2) можно эффективно решать на компьютере. В монографии [2] В. Т. Шевалдина есть практические рекомендации по ее решению.

Пусть $\beta_n = 0,\ 0 \le \alpha < 1,\ \mathcal{L}_n(D) = D\mathcal{L}_{n-1}(D)$ $(n \ge 2)$ и

$$W_\infty^{\mathcal{L}_{n-1}} = \big\{ f:\ f^{(n-2)} \in AC,\ \|\mathcal{L}_{n-1}(D) f\|_\infty \le 1 \big\}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема [3]. *Справедливо равенство*

$$\sup_{f \in W_\infty^{\mathcal{L}_{n-1}}} \|f - S\|_\infty = O(h^{n-1}) \quad (h \to 0).$$

Ключевым моментом для доказательства этой теоремы является следующий результат.

Теорема (Е.Г.Пыткеев). *Для любого* $s = 1, 2, \ldots, n$ *существует конечный предел* $\lim_{h \to 0} c_s h^{n-1}$, *где* $\{c_j\}_{j=1}^n$ *— коэффициенты в системе* (2).

При доказательстве теоремы Е. Г. Пыткеев исследует решение системы (2) по правилу Крамера и проводит очень тонкие выкладки (см. [2, 3]), используя теорию симметрических многочленов нескольких переменных. Оригинальный текст Евгения Георгиевича от руки изложен им на семи страницах очень красивым почерком. Разбор его доказательства доставляет истинное наслаждение. Заметим, что в полиномиальном случае подобное утверждение также было ранее получено с помощью симметрических многочленов [4], но об этом Е. Г. Пыткеев, конечно, не знал. Работать с ним было очень приятно.

Список литературы

[1] Е. В. Шевалдина. "Локальные L-сплайны, сохраняющие ядро дифференциального оператора". *Сиб. журн. вычисл. математики.* **13**:1 (2010), 111–121.

[2] В. Т. Шевалдин. "Аппроксимация локальными сплайнами". Екатеринбург: УрО РАН, 2014.

[3] Ю. С. Волков, Е. Г. Пыткеев, В. Т. Шевалдин. "Порядки аппроксимации локальными экспоненциальными сплайнами". *Труды Ин-та математики и механики УрО РАН.*, **18**:4 (2012), 133–144.

[4] Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. "Методы сплайн-функций". М.: Наука, 1980.